ELEMENTI

DI

ALGEBRA

DI

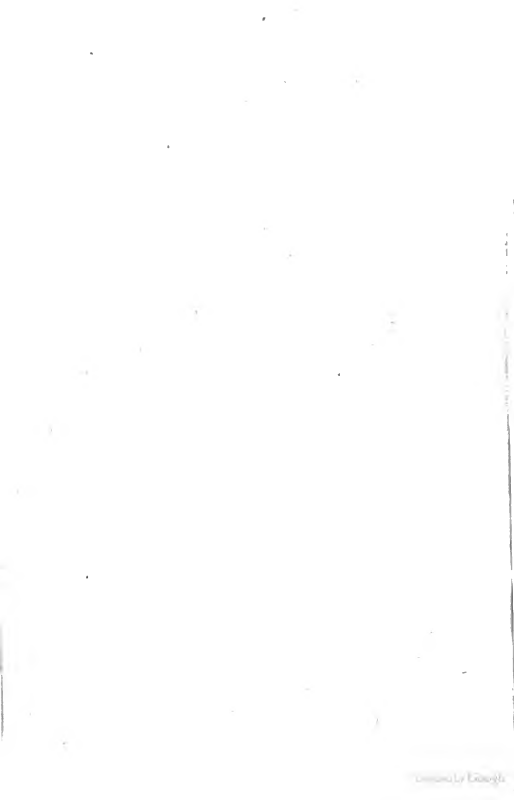
SEBASTIANO PURGOTTI

Quarta Edizione

RIVEDUTA E CORRETTA DALL' AUTORE

PERUGIA

TIPOGRAFIA DI VINCENZO BARTELLI

1858.

SEZIONE I.

Nozioni preliminari dell' Algebra.

CAPO I.

ORIGINE E DISTINTIVI CARATTERI DELL' ALGEBRA.

1. Due cose occorrono sempre, qualunque sieno i problemi che vogliamo risolvere: 1° conoscere quali operazioni convonga porre in pratica per ottenere ciò che si ricerca, ossia la parte *teorica*: 2° la reale esecuzione delle medesime, ossia la parte *pratica*. Su questa, che tutta consiste nell'applicazione delle regole stabilite per eseguire le fondamentali numeriche operazioni, non ha luogo rilievo alcuno. Rapporto però alla parte teorica, fa d' uopo rimarcare, che se in tutti i problemi che si danno a sciogliere per esercizio negli elementi di aritmetica, le indagini sono di lieve momento, perchè portata appena la nostra riflessione sullo relazioni cho passano tra le cose note e lo ricercate, in forza di un semplicissimo ragionamento tosto rileviamo dover essere lo richieste incognite il semplice risultato o d' un' addizione o sottrazione o moltiplicazione o divisione di quantità tutte note, lo stesso non può dirsi di qualunque altro quesito che presentato ci venga, mentre ve ne sono di quelli, per i quali fa d' uopo scorrere per una trafila di ragionamonti prima di giungere ad un risultato tale che a colpo d' occhio ci offra per quali operazioni si giunga all' intento.

2. Se per es. ci si dicesse « *Giulio* e *Marco non rammentano il numero delle lire che ciascuno di essi perdette al giuoco: ricordan solo che la somma delle perdite di entrambi fu di lire 84; e che Giulio perdette lire 12 più di Marco. Quanto perdettero entrambi?* » Eccoci ad un quesito in cui non veggiamo a primo aspetto come ottenere i due numeri che si cercano con una addizione o moltiplicazione o sottrazione o divisione che nei problemi che si sciolgono col solo sussidio dell' aritmetica elementare possiamo tosto eseguire sulle loro quantità note. Dirigendo però la nostra riflessione sullo condizioni del problema, notiamo prima d' ogni altro, che in esso *si cercano due numeri, l' uno maggiore l' altro minore, de' quali la somma è 84 e la differenza è 12*. Osserviamo in seguito, che il numero maggiore, o la perdita di Giulio è uguale al numero minore ossia alla perdita di Marco, più la loro differenza che è 12. E da ciò segue, che se il numero minore fosse conosciuto, coll' aggiungervi la data differenza 12 si avrebbo tosto il numero maggiore, sicchè trovato quello, tosto noto si rende anche il valore di questo.

Cerchiamo dunque il numero minore, e partendo dal riflesso che

Il numero minore più il numero maggiore è uguale alla data somma, che nel nostro caso è 84,

cominciamo dal sostituire alle parole (*numero maggiore*) l' espressione equivalente, cioè (*il numero minore più la differenza che nel nostro caso è 12*) nella ora esposta proposizione: essa si trasformerà in quest' altra

Il numero minore, più il numero minore, più la differenza che nel nostro caso è 12, è uguale alla somma 84.

espressione che può enunciarsi più compendiosamente così

Due volte il numero minore più la data differenza, che nel nostro caso è 12, formano la somma 84.

E poichè da ambe le parti uguali togliendo la differenza, esse, è chiaro, che resteranno uguali, avremo

Due volte il numero minore è uguale alla data somma che è 84 diminuita della differenza che è 12.

Ed essendo uguali anche le metà di cose uguali, avremo pure

La metà di due volte il numero minore, ossia il numero minore è uguale alla semi-somma, meno la semi-differenza, cioè nel nostro caso è uguale a 42 meno 6 ossia a 36.

Trovato così il numero minore, cerchiamo ora il maggiore. E poichè

Il numero maggiore è uguale al numero minore più la differenza,

se in questa proposizione alle parole (*il numero minore*) sostituiremo le equivalenti sopra trovate (*semi-somma meno la semi-differenza*) essa si convertirà nella seguente

Il numero maggiore è uguale alla semi-somma meno la semi-differenza più la differenza.

E sostituendo alla parola (*differenza*) le equivalenti (*semi-differenza più semi-differenza*), giacchè ogni cosa è uguale alle sue due metà, avremo

Il numero maggiore è uguale alla semi-somma meno la semi-differenza, più la semi-differenza, più la semi-differenza.

Ma le parole (*meno la semi-differenza più la semi-differenza*) possono togliersi perchè nel loro complesso non esprimono altra cosa che *zero*; e queste tolte, la superiore proposizione diventa

Il numero maggiore è uguale alla semi-somma più la semi-differenza, *cioè nel nostro caso a* 42 *più* 6 *cioè a* 48.

3. Per giungere dunque a conoscere nell' enunciato problema, che il numero minore, o la perdita di Marco è 36, il maggiore, o la perdita di Giulio è 48, ben ponderate le sue condizioni, è stato d' uopo di scorrere per una serie di proposizioni esprimenti ciascuna un nuovo rapporto, che immediatamente scende dall' antecedente, finchè siam giunti ad ottenere il *numero minore eguale alla semi-somma, meno la semi-differenza, e il maggiore eguale alla semi-somma più la semi-differenza*. Il simile far conviene in problemi della stessa indole, finchè siam giunti ad un' ultima proposizione concepita in questi termini. « *L' incognita eguaglia la somma*, o *la differenza*, o *il prodotto*, o *il quoto delle tali*, *e tali note grandezze* » proposizione che ci fa conoscere ottenersi l' incognita per qualcuna di quelle operazioni, che già sappiamo eseguire sui numeri. Or questa trafila di monotoni ragionamenti annoia la mente; o la stanca e l'opprime, producendo una confusione la più enorme, quando in problemi più difficili si rende tanto più complicata e più lunga. Di qui è nato il bisogno di abbreviare le espressioni per giungere con più facilità e sollecitudine ai risultati; e poichè negli accennati ragionamenti d' altro non si parla che delle *quantità note ed ignote* del problema e delle *relazioni* nelle quali esse stanno tra loro connesse, così l' intento è allora ottenuto quando si sarà trovato il modo di abbreviare l' espressione sì delle une che delle altre.

4. Le prime rimarchevoli modificazioni che si sono introdotte sono necessariamente cadute sulle quantità incognite. Infatti per rapporto alle quantità note, il più naturale espediente che a principio si è preso è stato quello di esprimerle per que' determinati numeri, che l' esempio ci offre, e che costituiscono il caso particolare del problema. Così nel nostro caso invece di dire « *la somma data de' numeri ignoti* » dir possiamo 84; e possiamo dir 12 in vece di dire « *la differenza data fra i due numeri ignoti* » tali essendo i valori di queste quantità nel caso particolare preso ad esempio. Non così però possiamo contenerci colle quantità incognite, poichè con cifre che determinano il rapporto delle grandezze all' unità siamo impossibilitati ad esprimere grandezze, in cui questo rapporto si ignora. Perciò piuttosto che indicare le cose che si cercano col loro nome, piuttosto che dire per es. « *la perdita incognita che Marco ha fatto al giuoco*, ovvero *il minor dei due numeri*, *dei quali è data la somma* » espressioni ben lunghe, si è pensato di ricorrere invece a qualche segno di convenzione indipendente da ogni valore particolare atto a semplicemente risvegliare l' idea d' una quantità indeterminata, senza cioè che sia precisato il suo rapporto all' unità, e tra i vari segni che si sarebbero potuti adottare, si sono scelte le lettere dell' alfabeto, come le più facili ad essere per abitudine delineate. Così il numero maggiore ignoto si può chiamar y, il minore x.

5. Ma nelle espressioni dei ragionamenti, che far dobbiamo sui problemi prima di passare alla parte pratica, non per altro occorre il bisogno di nominare le quantità incognite, che per esprimere i rapporti, che hanno colle quantità note, con cui son vincolate o per somma o per moltiplicazione ecc. Or poichè sulle quantità che non si conoscono queste operazioni sono ineseguibili, siamo necessitati ad indicarle, e per farlo con maggior brevità, piuttosto che servirci delle espressioni « *aggiunto a*, *diminuito di*, *moltiplicato per*, *eguale a*, *ecc.* » che vediamo spessissimo ripetute nei citati ragionamenti, si è pensato di rappresentare ancor esse con dei particolari concisi segni di convenzione, di alcuni dei quali attesa la somma loro co-

modità noi abbiamo fatto uso nell'Aritmetica pnr anche. Tali sono i seguenti.

$=$ uguale a	$\pm$ più e meno
$<$ minore di	$\mp$ meno e più
$>$ maggiore di	$\times$ moltiplicato per
$+$ più	$:$ diviso per
$-$ meno	$\surd$ radice di

6. Uso facendo di questi segni introdotti per la espressione sì delle quantità ignote che dei loro rapporti, abbiamo dalle condizioni $x+y = 84$ ed $y = x+12$. Perciò sostituendo nella prima espressione ad y il suo equivalente, avremo $x+x+12 = 84$, ovvero $2x+12 = 84$: e rilevandosi da questa espressione, che a $2x$ conviene aggiungere 12, perchè sia eguale a 84, è chiaro che la sola quantità $2x$ è uguale a 84 diminuito di 12, avremo cioè $2x = 84-12 = 72$, ondè $x = {}^{72}/_{2} = 36$; ed essendo poi $y = x+12$, avremo $y = 36+12 = 48$. Ed ecco trovati i valori dei due numeri incogniti maggiore, e minore cogli stessi ragionamenti di prima, sol che espressi iu un assai più laconico linguaggio.

Osserviamo però che questi ottenuti numeri 36 e 48 non convengono che al caso particolare in cni la somma dei due numeri cercati è 84, e la differenza è 12; mentre i ragionamenti in parole, avendoci portato a conoscere, come i numeri incogniti dipendano e si ottengano dai numeri dati, *qualunque essi sieno*, ci offrono perciò il modo di risolvere tutti i casi particolari possibili, che il problema comprende. Questo prezioso vantaggio che i ragionamenti in parole ci danno, si è da noi perduto nel nostro nuovo linguaggio, perchè abbiamo espressa la *somma data dei due numeri ignoti e la loro differenza* per mezzo dei numeri 84 e 12, che esprimono un valore determinato per un solo fra i tanti casi particolari che pnó abbracciare il poblema. Eseguendo infatti su questi numeri tutte le operazioni che di mano in mano ragionando vediam necessarie, giungiamo ai risultati 36 e 48 senza più ravvisar traccia alcuna del come si sieno essi ottenuti dalle quantità date 84 e 12. Perciò se ci si presentasse un altro caso particolare del problema medesimo, so volessimo conoscere due altri numeri, per es. gli anni di Cajo e di Tizio; la cui somma fosse per es. 100 e la differenza 22, i valori 36 e 48 ottenuti nell'esempio antecedente non ci servon di norma alcuna, e conviene che ripetiamo la stessa serie di raziocini fatta poc' anzi per ottenere l'intento; mentre se ci atteniamo all'ultimo risultato dei ragionamenti in parole che ci dimostra il *numero minore* x *eguale alla semi-somma meno la semi-differenza*, e il *maggiore* y *eguale alla semi-somma più la semidifferenza*, troviamo subito che in questo secondo caso

$$x = {}^{100}/_{2} - {}^{22}/_{2} = 50 - 11 = 39$$
$$y = {}^{100}/_{2} + {}^{22}/_{2} = 50 + 11 = 61$$

7. V' è però il mezzo di profittare dei vantaggi che si hanno dagli ultimi risultati dei ragionamenti in parole, che sono tante regole pratiche estensive a tutti i casi particolari del dato problema, senza rinunciare alla brevità che ci arrecano i nuovi segni introdotti. Infatti se noi 1° dopo aver espresse con lettere le quantità incognite; 2° dopo avere indicati i loro rapporti collo quantità note per mezzo di concisi appositi simboli, facciamo anche un passo più oltre, ed in vece di più esprimere le quantità note del problema coi numeri che appartengono al caso particolaro preso ad esempio, passiamo in vece 3° ad esprimer anch' esse con dei segni indipendenti da ogni determinato valore, cioè con le lettere dell' alfabeto a riserva delle ultime che si sono per convenzione riserbate per la indicazione delle quantità incognite, ogni inconveniente allora sparisce, e i simboli del nuovo linguaggio sono sino all' ultimo risultato una fedel traduzione do' ragionamenti in parole. Ed in vero se allorchè le quantità note ossia i *dati* del problema sono espresse in numeri, accade che per mezzo delle operazioni cui si assoggettano essi scompariscano, e nuovi ne appaiano nelle proposizioni successive e nell' ultimo risultato, senza che nulla ci manifesti con che operazioni ad esso risultato siam giunti, al contrario quando le quantità note sono espresse con lettere, non potendosi sulle lettere *eseguire*, ma solo *indicare* dei calcoli, esse passano attraverso alle diverse riduzioni e modificazioni del calcolo senza alterazione veruna da una proposizione all' altra sino all' ultimo risultato, il quale perciò mostra

sempre quali operazioni convenga fare sulle quantità date per ottenere l' incognita, mostra sempre cioè il modo con cui i dati sono tra loro combinati per esprimerla.

8. Così applicando le lettere anche alle quantità note nel proposto problema (§. 2) si può esso indicare in un modo generale così « *Trovar due numeri, la cui somma sia* s, *e la cui differenza sia* d ». Proseguendo ad indicare il numero minore con x, e con y il maggiore, le condizioni del problema ci danno $x + y = s$; ed $y = x + d$. Sostituendo l' equivalente di y, cioè $x + d$ nella prima espressione, avremo $x+x+d = s$ ovvero $2x+d = s$; e sottraendo d da ambe le parti col toglierlo realmente dalla sinistra e coll' indicare che egualmente va tolto dalla destra, si ottiene $2x = s-d$, ed $x = \frac{1}{2}(s-d)$ ossia $x = s/_2 - d/_2$. Or se traduciamo in linguaggio ordinario quest' ultimo risultato, sostituendo le parole che sono per convenzione rappresentate dalle lettere e dagli altri segni che esso contiene, noi otteniamo il risultato stesso che si è trovato coi ragionamenti in parole, che cioè « *Il numero minore è uguale alla semi-somma meno la semi-differenza* ». Se nella espressione $y = x+d$ sostituiscasi ad x il suo equivalente $s/_2 - d/_2$, avremo $y = s/_2 - d/_2 + d$, e poichè $d = d/_2 + d/_2$, avremo $y = s/_2 - d/_2 + d/_2 + d/_2$, dalla quale espressione togliendo $-d/_2 + d/_2$ perchè è *zero*, resta $y = s/_2 + d/_2$, espressione che tradotta in parole ci mostra che « *il numero maggiore è uguale alla semi-somma più la semi-differenza* ». Ora *questi ultimi risultati* del calcolo letterale $x = s/_2 - d/_2$ ed $y = s/_2 + d/_2$ *per la proprietà che hanno di essere generici, di darci cioè la soluzione generale del problema applicabile a tutti i casi particolari possibili* (e per le perdite fatte al giuoco da Giulio e Marco, e per l' età di Tizio e di Cajo e per qualsiasi altro valore qualitativo e quantitativo che dar ci piaccia alle lettere s e d indicanti la somma o la differenza dei due numeri che ricerchiamo) diconsi *Formole*, poichè sono come tante forme nei rispettivi nicchi delle quali sostituendo alle lettere i numeri dalle particolari circostanze richiesti senza alterazione veruna dei segni indicanti le operazioni che su que' numeri si deggiono eseguire, giungiamo a conoscere le incognite che ricerchiamo. Dicasi il simile per qualunque altro problema generico che ci piacesse risolvere diverso da quello « *Della ricerca di due numeri dei quali è data la differenza e la somma* » che abbiamo preso ad esempio, e conchiudiamo che

Formola *è quel risultato finale della parte teorica dei problemi espresso in lettere il quale ci indica il quadro di tutte le successive operazioni che eseguire dobbiamo su que' numeri che in ciascun caso particolare vanno sostituiti alle lettere affine di ottenere le quantità ricercate*.

Trasformazione delle formole in numeri *è l' esecuzione di tutte le operazioni dalla formola indicate su i numeri che offre il caso speciale preso di mira;* il che costituisce quella seconda parte dei problemi che si è detta *pratica*. (§. 1).

9. Nella lunga *analisi* che fatta abbiamo intorno all' ora sciolto problema, ci è occorso di osservare, I. come il bisogno che si ha in alcune circostanze di esprimere le quantità incognite che trovansi vincolate alle note, ha portato nel calcolo la introduzione delle lettere, come caratteri indipendenti da ogni particolare valore: II. come la necessità di spesso indicare le operazioni, che è impossibile di eseguire sulle quantità ignote, piuttosto che a far uso delle parole *somma, moltiplicazione* ec. ci ha indotto a servirci invece dei segni assai più concisi atti a mostrarci a colpo d' occhio i loro rapporti: III. come il bisogno che si ha di rendere permanenti anche negli ultimi risultati le tracce di quelle operazioni che si sono eseguite per ottenerli, affinchè possan queste applicarsi ad altri numeri per tutti gli altri quesiti della stessa natura, l' uso ha introdotto delle lettere per la espressione ancora delle quantità note, addimostrando così che alcune speculazioni di quantità si verificano non solo per alcuni valori numerici, ma per qualunque essi sieno. Così a poco a poco è nato un altro metodo di calcolare, le cui prime invenzioni vengono attribuite al Greco Filosofo Diofanto, metodo che può considerarsi per una continuazione dell'Aritmetica solo perchè ha avuto origine per suo sussidio, ma non già perchè ne sia simile l'indole. Ed in vero I° l' *aspetto* sotto cui si considerano le quantità, II° i *segni* con cui vengono espresse, III° i *segni* con cui ne vengono marcati i rapporti, IV° l' *indole* e il *risultato* de' ragionamenti

sono così diversi in questo nuovo algoritmo, che possono riguardarsi come costituenti una sintassi, una lingua ed una scienza a parte, che perciò si è contraddistinta col nome di *Algebra* (*a*).

E I° sono diverse le *quantità*, poichè quelle che considera l'Aritmetica sono i numeri: quelle che considera l'Algebra sono quantità indeterminate.

II° Sono diversi i *segni* con cui sono espresse le quantità; giacchè l'Aritmetica usa le cifre, l'Algebra le lettere. Ora

Le **Cifre** *sono i segni con cui l'Aritmetica esprime i numeri, ossia le quantità che hanno un determinato rapporto alle unità*.

Le **Lettere** *sono i segni con cui l'Algebra esprime le quantità indeterminate, ossia quelle che non hanno verun rapporto con l'unità*.

Sì le cifre che le lettere indicano quantità astratte e generali, poichè nè le une nè le altre precisano la *specie* delle cose. Le lettere però indicano quantità più generali delle cifre. Ed in vero se dalle cifre non è precisata la *specie*, lo è il *numero* ossia il rapporto che hanno le grandezze all'unità: dalle lettere non è precisato nè il *numero* nè la *specie*. Per es. *c* non esprime nè metri, nè lire, nè uomini: ma posto ancora che di uomini si parli, *c* non ne determina nè 4, nè 5, nè 10, come fanno le cifre, e null'altro indica che una quantità indeterminata. Perciò più generali di quelle che considera l'aritmetica sono le quantità che considera l'Algebra, ond'è che Newton la chiamò anche *Aritmetica generale*.

III° Sono diversi i *segni* con cui sono espressi i rapporti che hanno le quantità tra di loro, giacchè l'Aritmetica si serve delle parole *moltiplicato per*, *sottratto da* ecc. e l'Algebra usa i simboli convenzionali $\times$, $-$ ecc.

IV° Diversa finalmente è l'*indole* e la *risultanza* de' ragionamenti aritmetici e algebrici. Nelle speculazioni della quantità non solo si possono combinare le idee dei numeri senza applicarle ad alcuna cosa concreta, considerandoli cioè in uno stato di perfetta astrazione, il che si fa colle cifre, ed anche coi nomi de' numeri, e ciò è l'oggetto dell'*Aritmetica*: ma si possono fare anche dei calcoli sulla quantità senza nemmeno attendere al loro valore numerico astratto, ossia al loro rapporto con la unità, e colla sola considerazione che esse sono qualche cosa e null'altro, servendoci delle lettere. Così si calcolano degli *a*, dei *c* ec. senza interessarci di quanto possono valere ridotti in cifre, colla certezza che tutte le combinazioni che si saranno fatte sono giuste, qualunque sia il valore numerico che si dia ad *a* ed a *c*, al modo stesso che siamo sicuri che i valori numerici astratti serban sempre tra loro gli stessi rapporti, qualunque sia la cosa cui vengono applicati. Nell'*Aritmetica* i risultati sono *numeri astratti*; e noi abbiamo la certezza che si verifican sempre, qualunque sia *la specie* delle cose cui essi si applicano; nell'*Algebra* i risultati sono *formole*; ossia semplici indicazioni di operazioni che danno risultati i quali si verificano non solo qualunque sia la *specie* delle cose cui vengono applicate le formole, ma ancora qualunque sieno i *valori numerici* che a noi piaccia dare alle lettere. Ed è questo un immenso vantaggio che l'Algebra apporta nelle speculazioni relative alla quantità a cui l'altro si aggiunge della celerità con cui fa sì che la mente afferri i rapporti in grazia della concisione dei suoi segni; e questi due vantaggi siamo in grado di rilevare fin d'ora studiando la tavola seguente divisa in tre colonne, nella I.ª delle quali sta la soluzione del problema nel linguaggio ordinario: nella II.ª a fianco di ciascun ragionamento espresso nella prima vi ha la sua traduzione in scrittura parte numerica, parte algebrica e nella III.ª vi è la traduzione totalmente algebrica (*b*).

(*a*) Credesi questo vocabolo di origine araba; e taluni pretendono che significhi *Aritmetica più eccellente*: ma se certe prove non abbiamo che *Aritmetica più eccellente* sia l'Algebra per significato etimologico, sul quale nulla si sa di preciso, vero è però che essa è tale in realtà per la sua superiorità sulle forze dell'Aritmetica comune nella soluzione dei problemi.

(*b*) Nel novero delle differenze che passano fra l'Aritmetica e l'Algebra collocare si può in qualche modo anche la diversa impressione che nella mente de' principianti fanno le cifre e le lettere. Avvezzi essi a trattare i numeri e ad applicarli ai casi particolari anche prima di studiar Matematiche, trovandosi già abituata la loro immaginazione ad annettere ai segni numerici delle idee sensibili

Si cercano due numeri di cui è nota la somma e la differenza.

SOLUZIONE

A parole	*A cifre e lettere*	*A tutte lettere*
	Dei 2 numeri, x minore, y maggiore, la somma sia 84, la differenza sia 12.	Dei 2 numeri, x minore, y maggiore, la somma sia s, la differenza sia d.
Il numero minore più il maggiore formano la data somma:	$x+y=84$	$x+y=s$
Ma il numero maggiore è uguale al minore più la differenza:	$y=x+12$	$y=x+d$
Dunque il numero minore più il numero minore più la differenza è uguale alla somma data.	$x+x+12=84$	$x+x+d=s$
Dunque due volte il numero minore più la differenza è uguale alla somma,	$2x+12=84$	$2x+d=s$
Dunque due volte il numero minore eguaglia la data somma diminuita della differenza,	$2x=84-12$	$2x=s-d$
Dunque il numero minore è uguale alla semi-somma meno la semi-differenza.	$x={}^{84}/_{2}-{}^{12}/_{2}=36$	$x={}^{s}/_{2}-{}^{d}/_{2}$
Il numero maggiore poi è uguale al minore più la differenza:	$y=x+12$	$y=x+d$
Dunque il numero maggiore è uguale alla semi-somma meno la semi-differenza più la differenza,	$y={}^{84}/_{2}-{}^{12}/_{2}+12$	$y={}^{s}/_{2}-{}^{d}/_{2}+d$
Ovvero Il numero maggiore è uguale alla semi-somma meno la semidifferenza più la semi-differenza, più la semi-differenza.	$y={}^{84}/_{2}-{}^{12}/_{2}+{}^{12}/_{2}+{}^{12}/_{2}$	$y={}^{s}/_{2}-{}^{d}/_{2}+{}^{d}/_{2}+{}^{d}/_{2}$
Dunque il numero maggiore è uguale alla semi-somma più la semi-differenza.	$y={}^{84}/_{2}-{}^{12}/_{2}=48$	$y={}^{s}/_{2}+{}^{d}/_{2}$

non provano imbarazzo alcuno, per concepire il significato dellle cifre, come il provano per concepire quello delle lettere. I segni *a*, *b*, *c*, non risvegliano alla lor mente alcuo oggetto determinato, come 2, 3, 4, che tante volte hanno preso per frutti, per libbre, per uomini, ecc. e son perciò tentati a credere, che il calcolo de' segni algebrici sia un vano modo di ragionare, che aver non possa applicasione alcuna agli oggetti di nostra conoscenza, falsa prevenzione fatale ai loro progressi, che conviene sradicare dal bel principio col mostrar loro come il bisogno ci ha recato all' uso di questi segni, i quali appuoto per essere sforniti di particolare significato si per rapporto alla specie, che al quantitativo delle cose, sono attissimi ad esprimere de' ragionamenti geoerici applicabili ad una infinità di casi particolari in ogni genere di grandesze. E precisamante a tale importantissimo fine sono state dirette le minute analitiche osservasioni, che fatte abbiamo sull' esposto problema, la cui soluzione potrebbe sembrar precoce, se non venisse giustificata dall' accennato rifflessso.

Acquistata poi l' esatta cognisione delle differeoze che passano tra i valori della lettere e delle cifre, ossia tra le quantita algebriche e numeriche, questa vale a somministrarci il seguente facile criterio per beo conoscere quali materie sieno del puro dominio dell' Aritmetica, e quali dell' Algebra. Appartengono alla prima tutte quelle speculazioni come $8+7=15$ *che non possono esprimersi altrimenti che coi segni cifre*; spettano alla seconda tutte quelle *che possono essere espresse coi segni*

10. Dopo le fatte osservazioni ci troviamo obbligati a conchiudere che mentre l' Aritmetica tratta delle combinazioni e decomposizioni dei numeri, l'Algebra si occupa non dei numeri, ma semplicemente del modo con cui essi figurano nel calcolo: che mentre l' Aritmetica può perciò dirsi la *parte pratica*, l' Algebra è la *Logica*, è la *Teorica* delle quantità, o per servirmi della frase di Montferrier, mentre l' Aritmetica considera i *fatti* dei numeri, l' Algebra ne esamina le *leggi*: e può perciò definirsi così.

L' **Algebra** *è la scienza delle quantità indeterminate: e queste esprimendo con lettere e marcandone i rapporti con brevi segni convenzionali ci reca a que' risultati che diconsi formole, le quali ci indicano non già i valori delle cose incognite che il problema ricerca, ma il quadro delle operazioni che debbonsi eseguire per ottenerli.*

11. Tutte le varie sorte di quantità determinabile nei suoi gradi di aumento e diminuzione esser possono il soggetto dell'Aritmetica e dell' Algebra, peso, forza, moto, tempo, velocità, estensione. L' estensione però tra le altre quantità tale un immenso numero di utilissime proprietà ci offre e di un genere tutto suo, le quali perciò meritano di formare una scienza a parte, la *scienza dell' estensione* che è chiamata *Geometria*, ma impropriamente, perchè questo nome che significa *misura della terra* non ci indica che una sola semplice sua applicazione. Questo studio non è però affatto indipendente dall' Aritmetica, e dall' Algebra: anzi siccome si è veduto, che le quantità considerate da queste due scienze, purchè determinabili, esser possono di qualunque sia classe, chiaro risulta che le speculazioni aritmetiche e algebriche possono applicarsi anche alla estensione, e il fatto ci proverà di quanti sommi vantaggi sia stata capace questa felicissima applicazione.

Oltre a questi diversi aspetti sotto i quali è la quantità considerata dall' *Aritmetica*, *Algebra* e *Geometria*, ve n' è un quarto più sublime sotto cui viene presa di mira nel così detto *calcolo infinitesimale*, la cui disamina non appartiene al nostro corso. Lo studio poi della quantità determinabile nei suoi gradi di aumento e diminuzione, qualunque sia l' aspetto sotto cui si consideri, ha ricevuto fin dai più remoti tempi il nome di *Matematica*, che può dividersi in *elementare* e *sublime*. L' *elementare* comprende gli Elementi di *Aritmetica, Algebra* e *Geometria*, che sono il soggetto delle nostre occupazioni. La *sublime* abbraccia le più elevate nozioni di Algebra e Geometria che costituiscono la così detta *Introduzione al calcolo infinitesimale*, e quindi il

---

lettere, come la proposizione, *di due numeri il maggiore è uguale alla loro semi-somma più la loro semi-differenza*. Così quando osserviamo che

$$\frac{18}{2}+\frac{18}{3}+\frac{18}{6} = 18,$$

è questa una speculazione aritmetica: così pure la è l' altra

$$\frac{12}{2}+\frac{12}{3}+\frac{12}{6} = 12;$$

e così il sono pure quante altre simili ne rimarcassimo. Ma se noi potessimo convincerci che la *metà*, *più il terzo*, *più il sesto* non solo di 18, di 12 ec. (nel qual caso non osserviamo che dei *fatti* dei numeri) ma di un numero n, qualunque egli sia, fosse eguale al numero stesso; se potessimo cioè convincerci (come avverrà in seguito) che

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{6} = n,$$

noi allora osserveremmo una *legge* dei numeri; e questa speculazione sarebbe sempre del dominio dell' Algebra, quand' anche ci esimessimo dall' uso delle lettere per concepirla. E ciò ne piace avvertire perchè non si creda che una teorica cessi di essere algebrica e perda il suo carattere di universalità, se venga esposta senza profittare del laconismo dei segni algebrici. Le teorie non cambiano indole e natura a tenor che cambiano i segni di cui usiamo per esporle; ed abbiam già osservato nell' ora esposta tavola che l' andamento della dimostrazione è lo stesso o si usi il linguaggio ordinario o l' aritmetico o il letterale. Perciò abbiam detto esser criterio a conoscere se una data speculazione sia o aritmetica o algebrica l' osservare non se *sia*, ma se *esser possa* con caratteri algebrici esposta. E poichè nel calcolo algebrico siamo necessitati ad abbandonar le lettere e far ricorso ai numeri allora solo che giunti alle ultime formole dobbiam farne ai casi particolari l' applicazione; e poichè in questo caso per quanto le formole finali sieno ben complicate, non altre operazioni ci indicano che dobbiamo eseguire, se non che quelle che si eseguiscono su i numeri interi, così conchiudiamo che a queste sole a rigore si limita il campo della pura aritmetica. Tutt' altre speculazioni quando sono generali e applicabili a qualsiasi numero in specie, e tali per es. sono quelle relative alle proprietà delle frazioni, proporzioni, ecc. sono a rigore del puro dominio dell' algebra, sebbene vengano esposte senza il sussidio del laconico letterale algoritmo, ma con ragionamenti in parole, siccome nei trattati di Aritmetica suole farsi per non portar la mente di slancio nelle massime astrazioni, e per avvezzarla a far passo a gradi a gradi dal linguaggio comune al più arido delle lettere.

calcolo infinitesimale, ossia *differenziale*, e *integrale* — La Matematica tanto *elementare* che *sublime* dicesi *pura*, finchè si limita alle sole astratte teorie. L'applicazione di queste ai casi pratici, ed a qualunque classe di corpi chiamasi *Matematica mista* o *Fisico-Matematica*. Greca è la etimologia della parola *Matematica*. Essa deriva o dal verbo *mantano* (*scire*), o dal nome *mathema* (*scientia*); e le si è dato tal denominazione di *scienza per antonomasia*, e perchè colle felici sue applicazioni l'ossatura, a così esprimermi, costituisce di tutte le scienze esatte, e perchè le sue teorie sono una serie di cognizioni evidenti e certe inaccessibili all'errore, nel che appunto consiste la *scienza* presa nel suo stretto valore.

Epilogo

Del Capo I Origine e distintivi caratteri dell'Algebra.

I problemi, che esigono una serie di ragionamenti pria che si giunga a conoscere con che operazioni si trovino le incognite, ci obbligano ad introdurre *primo* le ultime lettere pell' espressione di queste; *secondo* i segni per l'indicazione delle operazioni; *terzo* le altre lettere dell'alfabeto per le quantità note; ed ecco il naturale passaggio dall'*Aritmetica* all'*Algebra*, l'utilità dei cui segni è manifestata dal confronto della soluzione di un problema ottenuta e col linguaggio ordinario e coll'algebrico. Le *quantità* i loro *segni*, i *segni* dei loro rapporti, l'*indole* e il *risultato* dei ragionamenti dell'Algebra differiscono da quelli dell'Aritmetica (§ 1 al 10).

L'Aritmetica che delle quantità determinate, l'Algebra che delle indeterminate, e la Geometria che delle quantità estese si occupa, sono parti della Matematica la quale si divide in elementare e in sublime, e l'una e l'altra poi in astratta o *pura* e in applicata o *mista*. (§. 11).

CAPO II.

IDEA DELL'ADDIZIONE, SOTTRAZIONE, MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE ALGEBRICA

Addizione algebrica, e quindi dei monomii e polinamii, delle quantità positive e negative.

12. La utilissima sostituzione delle lettere ai numeri fece nascere la necessità di semplicemente indicare con qualche segno quelle addizioni e sottrazioni di quantità che non possiamo più eseguire, come si fa in Aritmetica. Fu allora che il $+$ venne stabilito per segno della addizione e il $-$ per segno della sottrazione. Egli è chiaro infatti che se vogliamo indicare che al 9 va aggiunto il 5, possiamo scrivere $9+5$. Ma se scriver possiamo $9+5$, possiamo anche scrivere 14 risultato di questa addizione, risparmiando il segno $+$. Se però il 9 fosse espresso da a ed il 5 da c, altro allora non potrebbesi che indicare la loro somma, scrivendo $a+c$: il segno $+$ che ci indica essere c aggiunta ad a, ci è indispensabile, perchè la somma di c ed a non può essere che *indicata*. In simil guisa volendo togliere 5 da 9, possiamo scrivere $9-5$: ma si può anche scrivere il risultato di questa sottrazione che è 4, risparmiando il segno $-$. Quando però da a è espresso il 9, e da c il 5, più non si può precisare il loro residuo, e non ci è permesso che semplicemente *indicarlo*, scrivendo $a - c$; e quindi assolutamente necessaria si rende la presenza del segno $-$.

13. Si noti inoltre che se dovessimo aggiungere a 9 non il 5 come sopra, ma il 5 già diminuito di 2, cioè $5 - 2$ ossia 3, potremmo scrivere $9+5-2$; o (conoscendo che 5 diminuito di 2 è 3) potremmo scrivere $9+3$, o finalmente 12: ma se il 9 fosse espresso da a, il 5 da c, e il 2 da m, non potrebbesi in altro modo indicar l'addizione di $(c-m)$ ad a che scrivendo $a+c-m$. Ed in vero aggiungendo ad a la quantità c solamente, avremmo troppo aggiunto, perchè dovevasi aggiungere non c, ma c diminuito di m. Dopo dunque di avere scritto $a+c$, conviene che indichiamo che da questa somma va tolta quella quantità m che vi abbiamo aggiunta di più; e ciò otteniamo scrivendo $a+c-m$. L'esposto dunque ci reca a marcare, *che nel calcolo letterale anche allorquando trattasi di fare una ad-*

dizione, *può benissimo accadere il caso che debba indicarsi una sottrazione*, perchè una sottrazione doveva farsi antecedentemente sulla quantità che aggiunger dobbiamo.

Monomii e polinomii

14. La circostanza poi di dovere come abbiamo ora rimarcato inchiudere talvolta nelle stesse indicazioni delle addizioni anche le indicazioni delle sottrazioni (le quali si sarebbero eseguite prima di sottoporre le quantità alla addizione se si fosse trattato di numeri) ha fatto sì che siasi chiamato un *aggiungere* anche il porre le indicazioni di quelle sottrazioni che hanno luogo alla circostanza sopra indicata di dover fare un' adizione. E siccome in una addizione aritmetica le cose che insieme si aggiungono, ossia le poste non sono, come è chiaro, che tante quantità, così per analogia per tante quantità, si presero e il $+a$ e il $+e$, e il $-m$, ossia l'addizione (e meglio sarebbe il dire *posizione*) di a, l'addizione di e, la sottrazione di m, e si chiamarono *termini algebrici*. Quindi è che

Termine algebrico o **Monomio** *è una quantità considerata complessivamente al segno + o al segno — da cui è preceduta*.

Quantità polinomia o **Polinomio** *è un complesso qualunque di monomii, ossia un complesso qualunque di indicazioni di addizioni* o *sottrazioni di quantità*.

Più particolarmente questo complesso dicesi *binomio*, *trinomio*, *quadrinomio*, se risulta di due, tre, quattro termini.

Quantità positive e negative

15. L'uso poi di chiamare col semplice nome di quantità o di monomio tanto una addizione di quantità, come $+a$, $+e$, quanto una sottrazione di quantità come $-m$, fece sì che le operazioni di addizione e sottrazione non essendo più richiamate dalla parola, nemmeno più rimanessero associate alla idea (tanta sul richiamo di esse è l'influenza dei segni!) e quindi ne avvenne che non solo $-m$ fosse *chiamata*, ma anche *creduta* una semplice quantità: *hinc prima mali labes!* Abituati così i Matematici alla pratica erronea sì (ma però comodissima per viemeglio generalizzare ed esprimere con laconismo le speculazioni del calcolo) di ritenere sì il $+k$ per esempio che il $-k$ per semplici quantità, e fatta così astrazione dalle operazioni indicato dal segno $+$ e dal $-$, che precede la lettera (segni che nelle operazioni del calcolo non cessano giammai dall' indicare come stabilissi a principio, il primo una addizione, e il secondo una sottrazione) si trovarono nella necessità di scendere ad altre inesattezze. Ed in vero essendo evidente che $+k$ non è al certo la stessa cosa di $-k$ e non essendovi in questi simboli che indicazione di operazioni e indicazione di quantità, ne segue che non potendosi più attribuire la differenza dei due simboli alla vera causa, cioè alla differenza delle operazioni cui si deggiono sottoporre le quantità, perchè si è contratta l'erronea abitudine di alienare la mente dalla idea di queste operazioni, non resta altro scampo che attribuire questa differenza, anzi questa opposizione, alle quantità stesse, dicendo che $+k$ e $-k$ sono le indicazioni di quantità aventi un' opposta maniera di essere; e così insensibilmente si passò ad attribuire al modo di essere della quantità $-k$ quella azione distruggitrice del $+k$, che è il puro effetto della sottrazione. A ciò molto pure contribuì l'osservazione che in alcuni casi la sottrazione di una quantità è richiesta dalla esistenza d'una quantità opposta che nei quesiti è indicata. E quando $-k$ non risguardasi più por sottrazione di k, ma per una semplice quantita, ne segue che ponendola dopo m, scrivendo cioè $m-k$, non possiamo più riguardare questo binomio, quale esso è veramente, per la indicazione cioè della sottrazione di k da m, ossia per $m-(k)$, ma in vece per la indicazione dell' addizione della quantità negativa $(-k)$ ad m ossia per $m+(-k)$. Coll'essere caduti nell' errore di credere che $(-k)$ sia l'indicazione d'una semplice quantità, siamo venuti ad erroneamente supporre che il segno — destinato ad indicare non altro che sottrazione, possa fondersi insieme con la quantità, e formare un tutt' uno con essa, lo che esprimiamo appunto col far passare entro la parentesi il segno — insieme con la lettera, e così il — da segno che è di operazione, noi passiamo erroneamente a supporre che divenga semplicemente segno *qualificante* la quantità, e perciò segno con essa indissolubilmente congiunto, che ci fa conoscere che la quan-

tità che ne è affetta distrugge altrettanto per quanto essa è nelle quantità affette dal $+$ colle quali si trova congiunta.

16. E da questo errore eccoci naturalmente condotti a distinguere due sorte di quantità, quello cioè affette dal $+$ che si dicono anche quantità in *senso*, o in *qualità*, o in *funzione*, o in *istato* di addizione e che continuamente si contraddistinguono col nome di *positive*, e quelle affette dal $-$, che si dicono quantità in *senso*, o in *qualità*, o in *funzione*, o in *stato* di sottrazione e sono comunemente chiamate *negative*. E già la stessa parola *stato* di addizione e sottrazione delle quali fassi uso in questa distinzione ce ne manifesta l'inesattezza, giacchè l'addizione, e la sottrazione sono una operazione e non uno *stato*. Quindi l'epiteto di *negativa* dato alla quantità a rigore è un *assurdo*: quello di positiva è un *pleonasmo*. Egli è in vero tra i fondamentali canoni della matematica che in tutto il trattamento di un calcolo, le quantità soggette d'addizione e sottrazione (e a queste due tutte le operazioni del calcolo vanno a ridursi) sieno omogenee. E so talune ci vengono nei quesiti enunciate, che sono di opposta natura a quelle su cui già si opera come per es. sarebbero forze di natura opposte a quelle già dal calcolo prese in considerazione, non esse entrano nel calcolo, ma bensì la sottrazione di tante unità omogenee quante sono necessarie a distruggerle. E se le quantità su cui si opera sono in un medesimo calcolo tutte omogenee, e se non possono esistervi che o per esservi addizionate o per esservi tolte, è ben chiaro che se non esistono in sottrazione, debba no esistervi in addizione, ed il dichiarare queste con l'epiteto di *positive* è perciò una inutilità (*a*).

17. La distinzione però delle quantità positive e negative, sebbene inesatta fu utile perchè introdusse nella scienza maggiore brevità di espressioni sì nelle spiegazioni che nelle formole, e perchè rese più generiche e facili le applicazioni; e perciò da tutti i Matematici fu adottata. L'ammetterla è dunque indispensabile; ma è anche indispensabile (se amiamo di eliminare ogni pregiudizio ed ogni errore in proposito) di rammentare che

L' **Indicazione delle quantità positive** *è l'indicazione della posizione delle quantità*.

L' **Indicazione delle quantità negative** *è l'indicazione della sottrazione delle quantità*.

18. Intanto presa l'abitudine di riguardare sì il $+k$ che il $-k$ per semplici quantità: nè è seguito che come il porre nel calcolo $+k$ si è chiamato un aggiungere, così pure si è chiamato un aggiungere il porre nel calcolo $-k$, il porre cioè nel calcolo l'indicazione della sottrazione di k, cosicchè l'aggiungere o addizionare algebrico abbraccia tanto la posizione della quantità, che la posizione della sottrazione delle quantità, tanto cioè il porre che il togliere; e consisto perciò nello scrivere i termini algebrici con i proprii loro segni. Così avendosi il $+a$ il $-m$ il $+c$ il $-h$ si dice che abbiamo algebricamente aggiunti questi monomii, quando gli abbiamo avvicinati in fila, scrivendoli con i proprii loro segni come quì appresso

$$+a-m+c-h$$

e conchiudiamo perciò che

L' **Addizione algebrica** *è quell' operazione per mezzo della quale si schierano l'uno dopo l'altro i termini algebrici con i propri loro segni ad oggetto*

(*a*) Qualche istruttore potrebbe rimanere perplesso nel giudicare o no come erronea la distinzione delle quantità positive e negative, giacchè anche nelle opere di matematica le più moderne si coltiva l'errore di accordare al segno $-$ la proprietà di *qualificare* la quantità e quindi di ammettere lo stato positivo e negativo dei numeri. E fra molte di queste opere valga il citare l'ultima edizione del classico Dizionario delle matematiche. Ivi all'artic *filosofia delle matematiche* sta scritto « Lo stato positivo o negativo dei numeri riguarda essenzialmente la loro qualità, mentre le operazioni di addizioni e sottrazioni riguardano unicamente la loro quantità ». L'autorità però non deve prevalere alla chiara luce del vero. Il -10 altro non indica che sottrazione del 10. Se si tratta di scudi, questi sono tondi bianco-lucidi, pesanti sonori, tanto se si tratti di porli nello sgrigno, quanto se si tratti di toglierli da esso. Il 10 scudi di debito non differisce da 10 scudi di capitale perchè gli scudi di debito abbiano maniera di essere diversa dagli scudi di capitale, abbiano cioè la proprietà di distruggere il capitale stesso. La deficienza che gli scudi 10 di debito portano nel mio capitale non è l'effetto di questa proprietà distruggitrice qualificata dal $-$ che precede il 10 scudi, è l'effetto bensì di quell' operazione disgustosa che gli toglie dallo scrigno e che chiamasi *sottrazio-*

di indicare le addizioni e sottrazioni a farsi allorchè verranno sostituiti alle lettere i numeri.

19. Questa operazione consiste dunque in un semplice avvicinamento di termini algebrici ; ed è chiaro che non può chiamarsi vera somma il risultato numerico che andrà ad ottenersi , giacchè potrebbe essere esso minore ancora di ciascuna delle poste delle quali è costituito ; ed anche uguale a zero , ed anche l' indicazione di una sottrazione di quantità che per mancanza di minuendo non possa effettuarsi , il quale ultimo caso avverrebbe quando la somma delle quantità negative quella superasse delle quantità positive.

Sottrazione algebrica e duplice significato dei segni + e —

20. Come nell' addizione può occorrere di fare una sottrazione , così nella sottrazione può occorrere di fare un' addizione. Se in tasca io mi trovo due monete una da 20 e l' altra da 10 lire , ed essendo debitoro a Pietro di lire 7, traggo di tasca e do a Pietro la moneta di 10 lire , mi rimane in tasca la moneta di lire 20 . Queste lire 20 però non sono il vero residuo , poichè non lire 10 doveva io togliere (siccome ho tolte di tasca per non avere moneta sciolta) ma $(+10-3)$; e perciò avendo tolto lire tre più di quello che doveva , il giusto residuo sarà il 20 accresciuto di lire tre che Pietro mi rende in dietro. Tutto ciò esprimo col dire che il giusto residuo è $30-(+10-3)$. Ora da 30 togliendo il primo termine del sottraendo che è $+10$, ottengo $30-(+10) = 20$; dall' ottenuto 20 passando ora a togliere il secondo termine algebrico che è -3, ottengo $20-(-3) = 23$. Il secondo termine algebrico infatti non è il 3 ma il -3, ossia la sottrazione di 3; e togliere la sottrazione di 3 , ossia disfare quella sottrazione di tre lire che si è fatta più del dovere , allorchè si sono tolte di tasca lire 10 , è un riporre in tasca le lire 3 che Pietro mi rende egli è un aggiungere il 3 . È dunque evidente che $20-(-3) = 20+3$.

Si ragioni in simil modo se il 30 esprimesse le libbre di rum contenute in una damigiana , e se libbre 10 fosse il peso d' una bottiglia pesata dopo averla empiuta del rum tratto dalla damigiana indicata, e se il peso della bottiglia vuota fosse 3 libbre. Il rum che in questa ipotesi è nella damigiana rimasto e $30-(+10-3) = 20-(-3) = 20+3$; ed ecco esempii di addizioni a farsi nella circostanza d' una sottrazione.

21 L' assoluta necessità però di fare un addizione nella circostanza di dover sottrarre, egli è ben vero che in Aritmetica non capita mai , giacchè se dal 30 dobbiamo togliere $(10-3)$ non togliamo il 10 prima , e non restituiamo il troppo che si è tolto coll' aggiungere poscia il 3 , giacchè sapendo che il $(10-3)$ è 7, scriviamo $30-7$, e tosto otteniamo 23 . Ma se non in Aritmetica, spesso si ha in Algebra la necessità di togliere più di quel che si debbe ; e quindi il fare un' addizione all' ottenuto residuo affine di restituire il troppo tolto è inevitabile . Ed invero fatto $30 = a$, $10 = c$, e $3 = m$, abbiamo $a-(+c-m)$. In tal caso non possiamo a

---

ne, e che è espressa dal —, operazione opposta del tutto all' altra piacevole che nello scrigno li pone . E se il -10 è non accompagnato da altri termini , ma isolato, ciò esprime che io debbo dal mio scrigno togliere scudi 10 ; e m' accorgo che nello scrigno disgraziatamente non v'è nulla, sicchè non si può la sottrazione effettuare. Il -10 *scudi* non esprime dunque una quantità di natura opposta agli scudi di capitale : esprime che io debbo sottrarre scudi 10 dal mio scrigno e , questo è vuoto del tutto . Se si tratta di linee (immagina le funzioni del cerchio e per es. il Coseno) il Coseno $-c$ ti dice che nel tuo caso la linea che tu credevi potere aggiungere al seno verso per avere il raggio , come la definizione del coseno ti suggerisce, non esiste . Nel tuo caso l' aggiunta di una linea al seno verso per formare il raggio è un assurdo . Per ottenerlo tu devi *togliere* in vece, devi sottrarre la linea c dal seno verso , tu devi scrivere $-c$. Che se di far questa sottrazione onde avere il raggio non t' interessa , perchè il solo sapere che dovrebbe farsi, ti precisa che ottuso è l' angolo cui il Coseno appartiene , e ciò ti basta , rifletti che il fare astrazione dalla sottrazione indicata dal — non fa si che il — cessi dall' indicarla, e passi a prendere in vece un altro significato. Per maggiori dilucidazioni in proposito gli Istruttori che si servono di questo mio corso, sono pregati a leggere la XVI delle mie Lettere Filosofiche . Basta per ora agli Allievi quanto si è quì esposto nel testo .

meno di non dar principio alla nostra sottrazione dalla sottrazione del primo termine $+c$ cosicchè otteniamo per residuo, $a-c$, che per brevità possiamo indicare colla lettera r iniziale delle parole residuo. Questo residuo contiene però m unità di meno del giusto perchè è ottenuto col togliere m unità di più di quelle che togliere si dovevano; e si debbe perciò accrescero delle m unità di cui si trova mancante. Dobbiamo dunque aggiungervi m, ed avremo perciò $r+m$. Ma quest' espressione $r+m$ non fa conoscere che m si aggiunge perchè r è un residuo ottenuto per essere stale tolto m unità che ora vogliamo rendergli: ed appunto per mostrare questo motivo per cui ad r si fa l' addizione di m, in vece di dire che ad r si *aggiunge* m, si usa la circonlocuzione « *si toglie la sottrazione di* m » ossia in vece di scrivere $r+m$, si usa l' espressione equivalente $r-(-m)$. Ed è chiaro che porre m e togliere la sottrazione di m equivalgono se si rifletta che il togliere ossia il disfare una fatta sottrazione (e tale è l' idea che il simbolo $-(-m)$ risveglia) egli è tornare al minuendo coll' aggiungere al residuo il sottraendo. Quindi la rispettiva idea ad ogni segno annettendo, è d' intuitiva evidenza la seguente proposizione

r	$-$	$(-m)$	$=$	$r+m$
il residuo r d' una quantità ignota cui è stato tolto m	(allorchè venga tolta	la fatta sottrazione di m)	si rende uguale ossia diveola	il minuendo $r+m$ che non si conosceva e che ricerchiamo

Nei metodi d' insegnamento, giusta i quali il $-m$ esprime non una sottrazione di quantità, ma una semplice quantità, una quantità negativa, convien diro che r è il minuendo, che $(-m)$ è la quantità negativa che si sottrae, ed $r+m$ è il residuo. Un residuo maggiore del minuendo urta a dir vero il buon senso degli allievi!

22. Dall' esposto dunque risulta darsi nelle sottrazioni algebriche il caso ancora di dover fare delle addizioni: giacchè se può darsi che si abbiano a *togliere quantità* (e ciò si esprime cambiando il $+$ da cui sono affette in $-$) può darsi ancora che si abbiano a *togliere* le *sottrazioni di quantità*, e ciò si esprime cambiando il $-$ in $+$. Abbiamo cioè

$$p-(+q) = p-q$$
$$p-(-q) = p+q$$

Possiamo dunque conchiudere che

La **Sottrazione algebrica** *è quell' operazione per mezzo della quale scrivendo alla destra del minuendo tutti i termini del sottraendo con il segno opposto a quello che hanno, si indica il toglimento che far si debbe sì delle quantità che delle sottrazioni di quantità, delle quali il sottraendo risulta, quando verranno sostituiti alle lettere i numeri.*

Duplice significato dei segni $+$ e $-$

23. Il $+$ è sempre destinato per esprimere invariabilmente la posizione; ed il $-$ per indicare invariabilmente la sottrazione. La più ampla estensione però che si è data alla idea di quantità o termine algebrico fa sì che l' idea del *porre*, cui è sempre dedicato il segno $+$, si estenda ancora alla posizione delle sottrazioni e porti decremento, e che l' idea del *togliere*, cui è sempre dedicato il segno $-$, si estenda ancora alle sottrazioni delle quantità, e quindi importi addizione. Quando il $+$ esprime una *reale* posizione di quantita, ed il $-$ una reale sottrazione, io li chiamo *segni reali*. Quando il $+$ esprime un addizione algebrica a farsi, ed il $-$ esprime un' algebrica sottrazione, io li chiamo *algebrici* (a). Fra il significato reale e l' algebrico di questi segni, v' è appunto la differenza che passa fra l' addizione o sottrazione reale ed algebrica. Quindi il $+$ reale esprime le reali quantità; ed il $-$ reale le reali sottrazioni di quantità: il $+$ algebrico come segnale di addizione algebrica ci impone scrivere i termini con i segni loro propri: il $-$ algebrico come segnale di sottrazione algebrica ci impone scriverli con segno opposto. Eccovi nei si-

(a) Da taluni il segno $+$ e il segno $-$ algebrico suole dirsi *generico*: ma affinchè non abbiano i principianti a credere che quando hanno questo significato i segni si riferiscano a quantità più generiche che nell' altro, mentre le quantità possono essere generali egualmente nell' uno e nell' altro caso, noi abbiamo stimato meglio preferire l' aggettivo *algebrico* siccome quello che ci avverte consistere la differenza del significato nella differenza appunto che passa tra le addizioni e sottrazioni reali e le algebriche.

nistri membri delle sottoposte uguaglianze (A), (B) l'indicazione dell'adddizione algebrica, e nei sinistri membri delle uguaglianze (D) ed (E) l'indicazione della sottrazione algebrica, e nei destri i loro risultati. I segni a sinistra della parentesi hanno valore *algebrico* l'hanno *reale* quelli che precedono immediatamente le lettere.

(A) +	$(+c)$	=	$+c$
Porre	la posizione della quantità c	equivale a	porre la quantità c
(B) +	$(-c)$	=	$-c$
Porre	la sottrazione della quantità c	equivale a	sottrarre la quantità c
(D) —	$(+c)$	=	$-c$
Togliere	la posizione della quantità c	equivale a	sottrarre la quantità c
(E) —	$(-c)$	=	$+c$
Togliere	la sottrazione di c	equivale a	porre la quantità c

Annettiamo ad ogni segno la idea rispettiva; e le esposte uguaglianze sono proposizioni di intuitiva evidenza. Nè più può recar meraviglia che il +, sebbene sempre indichi il porre, pure talvolta porti diminuzione; e che il —, sebbene sempre indichi il togliere, arrechi talvolta incremento (*a*).

Moltiplicazione e Divisione algebrica

24. L'avere sostituito le lettere ai numeri importa che anche nella moltiplicazione algebrica particolari osservazioni abbian luogo, siccome è accaduto nelle addizioni e nelle sottrazioni. Ricerchisi per e. l'importo di prima compra di un liquore del quale si è empiuta una bottiglia, che pesata dopo essere stata empiuta è libbre 8, sapendosi che l'importo di ogni libbra è lire 6 compreso il dazio e il porto, ammontanti per ogni libbra a lire 2, e sapendosi pur anche che la bottiglia in cui si è collocato il liquore, vuota è libbre 3. Per giungere all'intento, ecco come naturalmente procedono le mie riflessioni.

I.° Ogni libbra costa lire 6. Le libbre sono 8. Otto volte 6 fa 48: dunque l'importo di prima compra è lire 48.

(*a*) È pure a notarsi che in Algebra non solo, nacque il bisogno di marcare che una quantità c è posta, lo che esprimiamo scrivendo $+c$, ovvero che una quantità c è tolta, nel qual caso scriviamo $-c$, ma in alcune speculazioni, le quali tanto più utili riescono quanto più generali, assai vantaggioso trovossi il fare astrazione dal segno reale da cui sono affette si le quantità che le sottrazioni di quantità per poter giungere a risultati egualmente applicabili come ai casi in coi le quantità sono poste, così a quelli in cui i dati del problema esignoo che sieno in vece poste le loro sottrazioni. Si sentì in somma il bisogno di esprimere nelle formole generali un tal termine che rappresentare ad un tempo potesse tanto una quantità affetta dal + che una quantità affetta dal — ad oggetto che la medesima formola fosse bene applicabile si ai casi particolari in cui si verifica la prima circostanza che a quelli nei quali si verifica la seconda.

A questo scopo se la quantità fosse indicata da c, sarebbe adattata l'espressione $\pm c$ ovvero $-c$ ma se ne bramò una più cuneisa; e si provvide ad un tempo alla chiarezza e al prezioso lacunismo con lo stabilire che nelle formole generali venga da una semplice lettera non preceduta da segno veruno indicata una quantità che in un qualche particolare caso esser possa positiva, e negativa in qualche altro: si stabilì in somma che nelle formole generali le lettere fossero sprovviste dal + e del — reale appunto perchè potessero adattarsi alla circostanza che richiede il + e a quella che richiede il —. Adottata questa convenzione, è chiaro che i segni da cui sono precedute le lettere nelle formole generali, non potendo essere reali, deggiono essere algebrici. Così può stabilirsi che con a sia espresso tanto $+10$ che -10. In tale ipotesi quando nei casi particolari per a venga espressa una quantità e non una sottrazione di quantità, quando cioè sia per esempio $a = +10$, espressione in cui il + che precede 10 ha un significato reale, ne verrà che se faremo noi ora precedere a dal segno + o dal — presi nel loro algebrico significato, avremo

$$+a = +(+10) = +10$$

$$-a = -(+10) = -10$$

Quando poi per a s'intenda la sottrazione di una quantità, sia cioè $a = -10$, allora avremo

$$+a = +(-10) = -10$$

$$-a = -(-10) = +10$$

Queste due ultime espressioni portandoci a rilevare che talvolta può essere $+a = -10$, e $-a = +10$, parrebbero indicarci un assurdo: ma la contraddizione sparisce allorchè riflettiamo che il segno che precede a è *algebrico*, e il segno che precede 10 è *reale*.

II.° Meglio riflettendo allo circostanze del quesito, mi accorgo che l' ottenuto 48 è un risultato erroneo; giacchè è vero che ogni libbra mi costa lire 6: ma è anche vero che per ogni libbra ho dovuto spendere lire 2 fra dazio è porto. Il primo costo di ogni libbra è dunque non lire 6, ma lire (6—2); e perciò per ognuna delle otto libbre io aveva posto lire 2 di più. Debbo dunque togliere dall' ottenuto prodotto 8 volte il 2; e perchè 8 volte 2 è 16, il costo di prima compra sarà 48—16 = 32. M' accorgo intanto che nella moltiplicazione occorre talvolta anche il caso di dover porre un dato numero di volte non solo le quantità, ma anche le sottrazioni delle quantità, giacchè ho dovuto porre 8 volte il —2.

III°. Ma meglio ancora esaminando il quesito, mi accorgo di non aver nell'eseguito calcolo cansato ogni errore: poichè rifletto che libbre 8 era il peso del liquore non già, ma della bottiglia piena del liquore; e poichè il peso della bottiglia vuota è libbre 3, è chiaro che il peso netto è tre libbre di meno, e che perciò non 8 volte, ma 8 volte meno 3 volte doveva io prendere il 6 e togliere il 2. Debbo dunque o toglier tre volte quel 6 lire costo di una libbra che ho posta tre volte di più: debbo cioè togliere 18: e in pari tempo debbo pure togliere 3 volte il —2 ossia aggiungere 3 volte il 2, ossia aggiungere 6 per riparare alla sottrazione del 2 che ho fatta 3 volte più del dovere: debbo dunque aggiungere 18+6. Quindi il vero risultato non è perciò 48—16; ma è 48—16—18+6.

Ecco lo schema del fatto ragionamento

Moltiplicando lire 6—2 .... = 4

Moltiplicatore volte 8—3 .... = 5

Prodotto $\overline{48\ -16}-18+6 = \overline{20}$

25. Tutto questo giro di deduzioni io poteva evitare, se rifletteva a principio che il 6—2 è 4; e che l' 8—3 è 5, giacchè avrei tosto ottenuto il risultato 20. Ma in Algebra non possiamo dispensarci dallo esprimere le indicate operazioni. Se il 6 *lire* fosse espresso da *a* ed il 2 *lire* dal *d*, o se l' 8 *volte* meno 3 *volte* lo fosse da *f*—*m*, noi saremmo necessitati ad indicare il moltiplicando per mezzo del binomio *a*—*d* e quindi ad esprimere che i termini che lo costituiscono vanno posti *f volte* e tolti *m volte*.

In Algebra dunque non solo v'è bisogno come in Aritmetica del segnale × che ci indichi il *quante volte*, ma di un segnale che ci indichi il *quante volte il moltiplicando va posto*, e di un altro che ci indichi il *quante volte il moltiplicando va tolto*. E poichè per indicare che una cosa va una volta posta nel calcolo ovvero va tolta una volta, noi ci serviamo del + algebrico, ovvero del — algebrico (§. 23) così per indicare che una cosa va posta *c* volte, ovvero va tolta *c* volte, facciamo uso del ×+*c*, ovvero del ×—*c*.

Ma il moltiplicando, abbiamo ora veduto, che in qualche circostanza risulta di più termini, e talvolta alcuni di questi sono *quantità*, taluni altri sono *sottrazioni di quantità*: perciò il termine che in taluni casi conviene porre e in taluni altri togliere un dato numero di volte può essere una quantità, per esempio +*a*, e può essere una sottrazione di quantità per esempio —*a*. Possono darsi perciò nella moltiplicazione i quattro casi seguenti.

I.	+*a* qualsiasi quantità	×+*c* posta *c* volte	= dà per prodotto	+*ac* una quantità
II.	—*a* sottrazione di qualsiasi quantità	×+*c* posta *c* volte	= dà per prodotto	—*ac* una sottrazione di quantità
III.	+*a* qualsiasi quantità	×—*c* tolta *c* volte	= dà per prodotto	—*ac* una sottrazione di quantità
IV.	—*a* sottrazione di qualsiasi quantità	×—*c* tolta *c* volte	= dà per prodotto	+*ac* una quantità

Il *primo* e *quarto* caso equivalgono, perchè con diverso giro di parole diciamo nel *quarto* la cosa stessa che il *primo* caso ci esprime. Togliere *c* volte la sottrazione di *a* (come diciamo nel IV.) è lo stesso che porre *c* volte la quantità *a* (come diciamo nel I.) poichè se una volta togliere la sottrazione di *a* è un porre *a*, togliere la sottrazione di *a c* volte sarà un *c* volte porre *a*.

Il secondo e terzo caso pure equivalgono, poichè porre *c* volte la sottrazione di *a* (come diciamo nel II.) è evidente valere il medesimo che togliere *c* volte la quantità *a*, come diciamo nel III.

26. Per comodo di brevità questi quattro casi si indicano lasciando di scrivere le lettere, così

$+\times+$ } dà $+$ $\quad$ $+\times-$ } dà $-$
$-\times-$ } $\quad\quad\quad$ $-\times+$ }

avvertendo sempre 1° che se si lasciano le lettere nello scritto, non le si debbono nella mente, giacchè la moltiplicazione cade sulle quantità e non su i segni: avvertendo 2° che i quattro casi per maggior facilità possono a due soli ridursi, cioè « *segni uguali danno* $+$, *segni opposti danno* $-$ »: avvertendo finalmente 3° che il segno $+$ o $-$ da cui è affetto il moltiplicando è sempre *reale*, perchè ci procisa se quantità, o sottrazione di quantità sia la cosa che si debbe ripetere, ed è sempre *algebrico* il segno che precede il moltiplicatore, poichè se è il $+$, ci significa che il moltiplicando va posto un dato numero di volte in senso algebrico, va cioè un dato numero di volte posto come è, positivo se positivo, negativo se negativo; e se il segno che precede il moltiplicatore è il $-$, ci significa che un dato numero di volte il moltiplicatore va tolto algebricamente ossia va posto col segno contrario a quello che ha.

27. Dal citato esempio di $6-2$ da moltiplicarsi per $8-3$ (§. 21) ossia dall'esempio del $(c-d)$ da moltiplicarsi per $(f-m)$ risulta che talvolta in Algebra per ottenere quel risultato medesimo che in Aritmetica si otterrebbe per mezzo della semplicissima moltiplicazione di 4 per 5, conviene porre un dato numero di volte, e un dato numero di volte togliere e quantità e sottrazioni di quantità. E perchè l'assieme di queste operazioni ci reca a quel risultato che in Aritmetica sarebbe il prodotto di una moltiplicazione, si è chiamato *moltiplicazione* pur esso; e perciò

Moltiplicazione algebrica *è quell'operazione per mezzo della quale si indica che tanto le quantità che le sottrazioni delle quantità si pongono o si tolgono un dato numero di volte.*

28. Dal concetto della moltiplicazione, come in Aritmetica così pure in Algebra scende quello della divisione, cosicchè

Divisione algebrica *è quella operazione per mezzo della quale, data l'indicazione di un prodotto e di uno dei suoi fattori si trova l'indicazione dell'altro fattore incognito.*

CAPO III.

Dei quattro elementi di cui risultano i termini algebrici, e dei loro rapporti.

Delle lettere che costituiscono i termini algebrici.

29. Dei quattro elementi di cui come ora vedremo risultano i termini algebrici, *lettere*, *segni*, *coefficienti*, *esponenti*, sono le *lettere* il perno su cui tutti gli altri si aggirano, e già nell'analisi che ci ha portato a conoscere (§. 9) come si è fatto passaggio dall'Aritmetica all'Algebra abbiamo notata l'utilità delle lettere per istabilire dei teoremi generali applicabili a tutti i casi particolari possibili, che ad essi appartengono. Il numero delle lettere che possono trovarsi in un solo termine è indeterminato, essendo un termine solo tanto a, quanto ac, quanto acd, $acdmp$, ec. È necessario però di conoscere essersi in Algebra stabilito, che il niun segno fra lettera o lettera è segno che l'una è moltiplicata per l'altra. Così ac equivale ad $a\times c$, acd ad $a\times c\times d$, ec.; come pure è necessario rammentare che i soli segni di addizione e sottrazione, i soli segni, cioè $+$ e $-$ valgono a separare un termine dall'altro. Così come $+a$ è un monomio, $-c$ è un monomio, è pure un semplice monomio anche $+a\times c\times d\times f\times g\times m$, e $-h\times p\times q\times r$, ec. mentre $a+c$ è un binomio perchè due; $a+c+d$ è un trinomio perchè tre; $a+c+d+f$ è un quadrinomio perchè quattro sono le quantità separate dai segni $+$ o $-$.

30. Si noti inoltre che le espressioni $acmp$ ed $a\times c\times m\times p$, ed $a.c.m.p$ sono sinonime, e tutte indicanti il prodotto formato dai 4 fattori a, c, m, p, che non può effettivamente ottenersi, se non allora che sieno precisati in numeri i loro valori; o se comunemente si dice, che si eseguisce la moltiplicazione, quando l'espressione

$a \times c \times m \times p$ si converte in $acmp$, questo modo di esprimersi è inesatto, giacchè altro non facciamo che passare da un indicazione più lunga ad altra più breve, poichè anche $acmp$ è un prodotto indicato e non ottenuto, al pari dell'altro.

31. Applicando poi all'Algebra quelle proprietà stesse che l'Aritmetica rimarca nei prodotti dei numeri, risulta, che $a \times c = c \times a$, che $ampr = amrp = arpm$ ec., che cioè nulla altera il quantitativo del prodotto la trasposizione dei fattori; e risulta pure che $a \times m \times p \times r = am \times p \times r = am \times pr = amp \times r$, che cioè si ha sempre il prodotto medesimo o si moltiplichi il primo pel secondo e il prodotto che ne nasce pel terzo, e il prodotto che ne risulta pel quarto ec., ovvero si moltiplichi il prodotto dei due primi pel terzo, e ciò che ne risulta pel quarto, o il prodotto dei due primi fattori pel prodotto dei due ultimi ec.

Dei segni da cui sono preceduti i termini algebrici.

32. Niuna quantità può esistere in un calcolo se non perchè vi sia posta, o vi sia tolta. Perciò nei casi particolari ogni termine è duopo sia preceduto dal segno $+$ o dal segno $-$. Per indicare poi che una quantità deve togliersi, è indispensabile farla sempre precedere dal segno $-$. Non così è necessario farla sempre precedere dal $+$ per indicare che la quantità debbe porsi nel calcolo. Tutte le volte che il monomio non sia preceduto da lettere appartenenti ad altro monomio (nel qual caso per conoscere che vi è separato è indispensabile un qualche segno) ossia tutte le volte che un monomio o è isolato o trattisi del primo termine di un polinomio, può tralasciarsi il segno $+$, poichè si è convenuto, che quando in un termine isolato o nel primo termine di un polinomio manca il segno, è il solo $+$ che debbe sottintendersi. La qual convenzione è giustissima poichè se dal vedere in un calcolo scritto il $+c$, rileviamo che vi è posta la quantità c, siamo necessitati a rilevare la medesima cosa al vedervi posto c senza essere preceduto da segno alcuno. Ed in vero non possiamo avere l'idea di una cosa qualunque espressa da c senza che al tempo stesso si offra al pensiero l'idea della sua esistenza, e se niun segno abbiamo che ci significhi che la sua esistenza la sua posizione debbe esser tolta, l'idea che risveglia c è inseparabile dall'idea che essa esiste, che essa è posta nel calcolo; e ben filosofica è perciò la convenzione che c, e $+c$ equivalgano. Come poi il segno $+$ che sempre indica il porre, e il $-$ che sempre indica il sottrarre possano avere un valore algebrico e un valore reale, già lo vedemmo (§. 23).

Dei Coefficienti.

33 Se ad a si volesse aggiungere c, non possiamo altrimenti indicare questa addizione che scrivendo $a+c$: ma se la quantità che volesse aggiungersi ad a fosse un altro a, è ben chiaro che in vece di scrivere $a+a$, possiamo scrivere $2a$. Così l'addizione di $a+a+a$ può essere espressa da $3a$ ec. Egualmente per indicare la somma di due quantità negative eguali, *in vece dell'espressione* $-a-a$, usar possiamo l'altra $-2a$; ed ecco come nascono le quantità algebriche affette dai numeri i quali perchè insieme con le lettere *coefficiunt* i termini algebrici, sono stati chiamati *coefficienti*. Perciò

Coefficienti *sono quelle cifre (e talvolta nelle formole le più generali quelle lettere che stanno in vece delle cifre) le quali poste alla sinistra della quantità letterale ci mostrano quante volte essa sia ripetuta.*

34. Da questa definizione risulta che il coefficiente non è altro che il moltiplicatore della quantità innanzi a cui è posto. Così $5a$ equivale a $5 \times a$; e stabilir possiamo, che ogni quantità algebrica è di coefficiente fornita anche quando ne è apparentemente sprovvista, giacchè in tal caso il coefficiente è l'unità, essendo ben chiaro che $1a = a$, perchè a presa una sola volta, ossia moltiplicata per 1 non è che a. E quì si noti che anche quando abbiamo convertita la espressione $a+a+a+a$ in $4a$, questo risultato $4a$ è un'indicazione di operazione più compendiosa che non è $a+a+a+a$, poichè esprime una moltiplicazione, mentre la prima esprime una

addizione; ma è sempre un' indicazione di operazione, che non può eseguirsi, se non quando si dia ad a un particolare valore.

35. Si noti pure che non solo le semplici lettere, ma anche i prodotti di più fattori possono essere affetti da coefficiente. Ben chiaro è infatti che invece dell'espressione $cmp+cmp+cmp$ può scriversi più brevemente $3cmp$ e che in vece di $-ag$ $-ag$ può scriversi $-2ag$.

Degli Esponenti.

36. Quando una quantità m debbe moltiplicarsi per altra p, e poi il loro prodotto per q, e quello che ne risulta per r, questa moltiplicazione non può essere più laconicamente indicata che scrivendo $apqr$. Può però darsi il caso che una quantità abbia più volte a moltiplicarsi per sè medesima, come se si avesse mm, aaa, $cccc$, $gggg$... colla quale ultima espressione che termina con dei punti intendiamo di esprimere il prodotto che nasce dal moltiplicare g per sè medesimo, scrivendolo come fattore non due, non tre volte, ma un numero di volte indeterminato, il quale numero indeterminato di volte esprimiamo con *n volte*. In tali circostanze si è convenuto di accorciare le espressioni, evitando le ripetizioni collo scrivere il fattore una volta sola e mettere alla sua destra una piccola cifra (ovvero una lettera) un poco elevata, la quale dicesi *esponente* perchè diretto appunto ad *esporre* il numero delle volte che dovrebbe essere il fattore scritto di seguito per moltiplicarsi per sè medesimo. Così i citati prodotti si indicano per m^2, a^3, c^4, g^n. Quindi è che

Esponenti *sono quelle cifre o quelle lettere che poste in alto a destra di una espressione letterale, ci indicano il numero determinato (o indeterminato) di volte che la quantità letterale dovrebbe essere scritta come fattore, per moltiplicarsi cioè per sè medesima.*

37. **Potenze** *sono i prodotti che risultano dalla moltiplicazione di una quantità per sè stessa.*

Radici *sono le quantità cui vengono applicati gli esponenti.*

E sì le potenze che le radici si dicono del grado espresso dal numero delle volte che la radice detta anche *quantità generatrice* è duopo sia ripetuta come fattore per effettuare la data potenza, e perciò il grado è determinato dall'esponente. Si dirà perciò *potenza seconda*, *terza*, *quarta*, *ennesima*, se l'esponente sarà il 2, o il 3, o il 4, o n. Quindi m^2, a^3, c^4, g^n si pronunziano « *m innalzato alla seconda potenza*, o più semplicemente *m alla seconda*, o anche *m ad due* »; e così « *a elevata alla terza potenza*, ovvero *a alla terza*, ovvero *a ad tre* » « *c alla quarta*, ovvero *c ad quattro* » « *g alla ennesima*, ovvero *g ad n* » e poichè due fattori si esigono per fare la prima moltiplicazione d'una quantità per sè stessa, è chiaro che il numero de' fattori è d'una unità maggiore del numero delle moltiplicazioni, e quindi per ottenere una potenza d'una data quantità convien moltiplicare la quantità per sè stessa una volta di meno delle unità, che sono nell'esponente della voluta potenza, lo che esprimiamo dicendo, che per ottenere c^n ossia la potenza *ennesima* di c, convien moltiplicare c per sè stessa un numero $n-1$ di volte. La seconda potenza dicesi anche *quadrato*, e la terza *cubo* della quantità generatrice, e vedremo in Geometria da che abbia avuto origine l'introduzione di questi nomi.

38. Se una quantità avesse per esponente l'unità, ciò significherebbe che va scritta una volta sola come fattore. Dunque $a^1=a$; e come a^3 è la *terza* potenza di a, come a^2 è la *seconda* potenza di a, così per analogia si è anche detto, che a^1 è la *prima* potenza di a, quantunque a rigore essendo destinato il vocabolo potenza ad esprimere i diversi prodotti d'una quantità che si moltiplica successivamente per sè medesima, non può esservi potenza propriamente detta ove non ha luogo moltiplicazione.

39. Non solo le semplici lettere, ma anche i prodotti di più fattori possono essere affetti da esponenti. Infatti intende ognuno, che invece dell'espressione $a^2cm^3 \times a^2cm^3$ si può più brevemente scrivere $(a^2cm^3)^2$; che si può scrivere $(2a^2g^3)^3$ in vece di $2a^2g^3 \times 2a^2g^3 \times 2a^2g^3$; e $(3c^4)^n$ invece di $3c^4 \times 3c^4 \times 3c^4 \times \ldots$ in vece cioè di $3c^4$ scritto n volte come fattore.

40. L'*esponente* non va poi confuso col *coefficiente*, ben diverse essendo le loro attribuzioni. Questo denota quante volte una

quantità va scritta in *addizione* a sè stessa: quello indica quante volte una quantità va scritta come fattore, ossia quante volte va scritta in *moltiplicazione* per sè stessa. Così $5a = a+a+a+a+a$; ed $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$; ond'è che se a fosse 100, $5a$ sarebbe $5\times100 = 500$, ed a^5 sarebbe $100\times100\times100\times100\times100$, ossia 10.000,000.000.

Dei rapporti che hanno tra loro i termini algebrici.

41. L'analisi ora compiuta dei termini algebrici ci ha recato a distinguere in essi le *lettere* e i *segni*, i *coefficienti* e gli *esponenti* da cui sono esse affette, cosicchè conchiudere possiamo che ogni termine algebrico è fornito del suo segno, del suo coefficiente, ed esponente: ma il segno si tralascia per convenzione nelle quantità positive, quando esse sono isolate, o sono il primo termine di qualche algebrica espressione: il coefficiente, e l'esponente poi, quando essi sono l'unità. Così se apparentemente a è una lettera senza segno, coefficiente, ed esponente; in realtà essa è fornita di tutti e tre, poichè $a = +1a^1$.

A tenore poi di alcuni rapporti che gli elementi di un termine hanno con quelli di un altro prendono diverse denominazioni.

Termini omogenei ed eterogenei

42. **Monomii o termini omogenei** *diconsi quelli che risultano dello stesso numero di fattori, sieno pure qualunque e le lettere e gli esponenti e i coefficienti ed i segni.*

Monomii o termini eterogenei *si chiamano quelli che risultano di un disuguale numero di fattori.*

Sono omogenei acf, mpq, a^2c, m^3. Sono eterogenei ac, ac^2, m^5.

Termini simili e dissimili; e Riduzione

43. **Monomii o termini simili** *sono que' monomi omogenei, che hanno le stesse lettere e gli stessi esponenti nelle stesse lettere, sien pure qualunque i coefficienti, e i segni.*

Monomii o termini dissimili *sono quelli che o non hanno le stesse lettere o se le hanno, le hanno affette da diverso esponente.*

Sono simili $+6a^2c$ e $-4a^2c$: sono dissimili $+4a^2c$ e $+4ac$.

44. Su i termini simili ha luogo la interessantissima riduzione.

Riduzione *è quella operazione per la quale due o più termini simili si raccolgono in uno solo.*

Tre sono i casi che essa contempla, poichè i termini simili che trovansi in un calcolo 1° o sono tutti positivi, come $2a^2+6a^2+a^2$, e possono ridursi in un termine solo $9a^2$, facendo precedere la quantità letterale a^2 dalla somma de' coefficienti: 2° o sono tutti negativi, come $-3cf-2cf$; e si riducono in egual modo nel solo termine $-5cf$, avvertendo di far precedere dal segno $-$ il termine ridotto: 3° o sono parte positivi, e parte negativi, e in allora si riducono facendo la somma delle quantità simili precedute dal $+$, poi quella delle simili precedute dal $-$; poi togliendo la più piccola di queste somme dalla più grande, dando al resto il segno della maggiore. Così $3cm^3-2cm^3-4cm^3+cm^3 = 4cm^3-6cm^3 = -2cm^3$. Quando poi la somma de' termini negativi, e positivi è uguale, il risultato è zero.

Termini eguali e disuguali

45. **Monomii o termini uguali** *diconsi quei termini simili che hanno uguale anche il coefficiente, qualunque sia il loro segno.*

Monomii o termini disuguali *diconsi quelli che quantunque uguali in tutto il rimanente, hanno disuguale il coefficiente.*

Sono uguali $+3a^2p$ e $-3a^2p$: sono disuguali $+4a^2p$ e $+3a^2p$.

Monomii identici e non identici

46. **Monomii o termini identici** *sono que' termini uguali che hanno lo stesso segno.*

Monomii o termini non identici *sono quelli che quantunque uguali in tutto il resto, non lo sono nel segno.*

Sono perciò identici $+3acp$ e $+3pac$ perchè non v'è in essi altra differenza che nella disposizione dei fattori la quale

non altera l'identità perchè non altera in verun conto il prodotto. D'altronde sono eguali, ma non identici perchè hanno segno diverso $+3acp$ e $-3acp$.

Epilogo

Del Capo II e III. Delle nozioni elementari dell' Algebra.

CAPO II. Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione e Divisione algebrica.

Addizione algebrica. La sostituzione delle lettere alle cifre ha reso inseparabili dalle lettere i segni $+$ e $-$, donde la necessità d' indicare sottrazioni nelle stesse addizioni. L'unione indispensabile del segno alla lettera ha fatto dare al loro insieme il nome di termine o di monomio; e di più monomii risultano i polinomii. Il chiamare col semplice nome di quantità e lettera e segno fu causa che si ritenesse ancora per una semplice quantità tanto la quantità espressa dalla lettera che l' operazione indicata dal segno, e questo errore fece sì che si chiamassero quantità positiva la posizione, quantità negativa la sottrazione delle quantità, e addizione algebrica l' avvicinamento delle une e delle altre nel calcolo (§. 12 al 19).

Sottrazione algebrica. La permanenza dei segni $+$ e $-$ nei successivi procedimenti del calcolo fù pur causa che nelle stesse sottrazioni uopo fosse di indicare addizioni, lo che accade quando ciò che si toglie è sottrazione di quantità, giacchè togliere sottrazioni è un aggiungere. E il toglimento sì delle quantità che delle sottrazioni di quantità si disse sottrazione algebrica. E dall' addizione e sottrazione algebrica ebbe origine il duplice significato algebrico e reale dei segni $+$ e $-$ (§. 20 al 23).

Nella *moltiplicazione algebrica* si pongono o si tolgono un dato numero di volte le quantità n le sottrazioni di quantità; e nella *divisione algebrica* si trova il fattore incognito, dato il prodotto e l' altro fattore (§. 24 al 28).

CAPO III. Dei quattro elementi dei termini algebrici e dei loro rapporti.

Un monomio è costituito da una o più lettere; e quando sono più, indicano che le quantità da esse espresse sono moltiplicate le une per le altre, e comunque disposte danno sempre lo stesso prodotto: ha inoltre un *coefficiente* che indica quante volte la quantità letterale è ripetuta, e un *esponente* che indica quante volte la lettera che ne è affetta s' intende scritta come fattore. I termini algebrici poi tra loro paragonati prendono particolari denominazioni. Debbono avere eguale il numero dei fattori, per essere *omogenei*, altrimenti sono *eterogenei*: di più le lettere con i respettivi esponenti per esser *simili* (altrimenti sono *dissimili*): di più il coefficiente per esser *uguali* (altrimenti sono *disuguali*): di più il segno per essere *identici* (§. 29 al 46).

SEZIONE II.

Metodi di ridurre alla più breve possibile espressione le indicazioni delle operazioni sulle quantità intere espresse in lettere.

47. I segni, i coefficienti e gli esponenti da cui sono affette le lettere nei termini algebrici esigono un trattamento particolare nel calcolo che per loro mezzo addiviene brevissimo, e nelle pure regole relative al più possibile compendio delle algebriche espressioni consistono i metodi delle prime quattro algebriche operazioni. Esse infatti altro non fanno che trasformare le primitive indicazioni di operazioni in altre indicazioni o più semplici o più adatte a manifestare le condizioni aritmetiche cui nei casi particolari si dee soddisfare, giacchè in Algebra (a riserva di que' pochi casi di sottrazioni e divisioni, nei quali si ha in fine del calcolo una lettera sola) gli ultimi risultati in lettere, che si ottengono in seguito anche dei più complicati processi, null' altro sono che indicazioni di operazioni.

48. Le quantità date a sommarsi essere possono o monomie o polinomie, ma comunque esse sieno, dall' esposto (§.§.18) risulta non potersi altro in essi termini eseguire che disporli in serie gli uni dopo gli altri. Così avendo a sommarsi i polinomii $+(5a^2-3cf+c^3f^2)+(-2f-3a)+(-c^2)$ avremo per risultato algebrico

$$5a^2-3cf+c^3f^2-2f-3a-c^2$$

49. La nuda addizione algebrica non esige per sè stessa altre avvertenze. Spesso però accade che alcune fra le quantità a sommarsi sieno simili; ed allora queste è d' uopo riunire in un termine solo per mezzo della Riduzione. Questa operazione però non va coll' addizione algebrica in conto alcuno confusa, siccome piace a taluni, e perchè si danno addizioni algebriche senza riduzione, come nell' ora esposto esempio, e perchè dessa non è che la più concisa indicazione di più moltiplicazioni riunite in una, in grazia dell' addizione o sottrazione dei coefficienti.

Per eseguire poi con più speditezza la riduzione, I. giova disporre i polinomii a sommarsi in guisa, che le quantità simili sieno le une sotto le altre in colonna: II. nello scrivere le lettere di un termine qualunque (e non solo nell' adddizione, ma in tutte altre operazioni) giova conservare il loro ordine alfabetico per facilitare la ricognizione dei termini simili: III. giova (unicamente però per uniformarci all' andamento della nostra scrittura) cominciare la riduzione a sinistra progredendo verso destra. Ed eccone un esempio. Sieno a sommarsi i polinomii $+(3a^2m+4m^2-am^3)$, $+(6m^2+8x)$, $+(-2am^3-4x)$, $+(-9m^2-4x)$.

Disponendoli e riducendoli avremo

$$\begin{array}{l} 3a^2m+4m^2-am^3 \\ \quad\quad +6m^2 \quad\quad\quad +8x \\ \quad\quad\quad\quad -2am^3 -4x \\ \quad\quad -9m^2 \quad\quad\quad -4x \\ \hline \end{array}$$

Somma $3a^2m+m^2-3am^3$.

ESERCIZIO

I. $(3c^2p+2cp-m)+(2m-3cp+2c)+(3c^2p+cp) = 6c^2p+m+2c = 127$, quando sia $c=2$, sia $m=3$, sia $p=5$

II. $(3a^2m+4m^2-am^3)+(6m^2+8q)+(-2am^3-4q) + (-9m^2-4q) = 3a^2m+m^2-3am^3 = -171$, quando sia $a=5$, $m=3$, $q=2$.

III. $(3pr^4+4p^2r^2s-2pr^2+r^2s)+(3p^2r^3s-2r^2s)+(-r^2s-6p^2r^3s+pr^4)+(-2pr^4+2pr^2) = 2pr^4+p^2r^3s-2r^2s = 4128$ quando sia $p=5$, $r=4$, $s=1$.

SOTTRAZIONE

50. Nella sottrazione può darsi che il minuendo sia o positivo o negativo: e nell'uno e nell' altro caso può darsi che il termine sottraendo o i termini del sottraendo sia o sieno forniti o del segno + o del segno —. E, considerando che ciò che si osserva per un binomio può estendersi ad un trinomio ecc., qui sotto esponiamo tutti i cinque casi possibili di sottrazioni tanto allorchè il minuendo è positivo, quanto allorchè il minuendo è negativo.

Quando il minuendo è positivo, abbiamo

I. $c-(+p)\ldots\ldots = c-p$

II. $c-(-p)\ldots\ldots = c+p$ (Nota *a*)

III. $c-(+a+p) = c-a-p$

IV. $c-(-a-p) = c+a+p$

V. $c-(+a-p) = c-a+p$

E l' equivalenza notata in ciascuna di queste cinque espressioni, dopo l' idea che

(*a*) Questo caso in cui il risultato della sottrazione algebrica è un addizione, mostra ad evidenza quanto erroneamente siasi definita la sottrazione algebrica anche da quelli i quali accortisi che non

abbiamo esposta della sottrazione algebrica è evidente per sè.

Quando il minuendo è negativo, ecco i cinque casi che parimenti hanno luogo; e sotto il I. e sotto il II. poniamo i rispettivi significati, che bastano a rendere agevolissima l' intelligenza del significato del III., del IV. e del V.

I. $-c-(+p) = -c-p = -(c+p)$

Non ho minuendo: anzi debbo togliere c; ed ora per di più si vuole che si tolga p. Ciò equivale a dire che si debbe togliere $c+p$.

II. $-c-(-n) = -c+n$

Non ho minuendo: anzi mi occorre di togliere c. Ma poichè quando avrò tolto c, avrò tolte n unità di più di quelle che dovea: debbo perciò restituire le n unità che ho tolte di più; ed avrò $-c+n$, che proseguirà ad essere l' indicazione di una sottrazione di quantità se $c > n$: sarà viceversa l' indicazione d' una quantità se $c < n$

III. $-c-(+a+p) = -c-a-p$
IV. $-c-(-a-p) = -c+a+p$
V. $-c-(+a-p) = -c-a+p$

51. Se nella sottrazione poi, può aver luogo la riduzione, e specialmente quando, essendo polinomii tanto il minuendo che il sottraendo, sieno molti i termini simili, *giova collocare* sotto il minuendo scritto con i propri segni, tutti i termini del sottraendo con i segni opposti, ed in modo che l' uno sotto l' altro si trovino soltanto i termini simili; e quindi tirata una linea orizzontale dopo il sottraendo, scrivere sotto di essa il residuo ridotto a tenore delle regole stabilite.

Così avendosi $(2cm^2-3c^2+a^3-a^2)$ $-(a^3-2a^2+cm^2+3x)$ ecco qui sotto il processo ed il risultato

Minuendo	$2cm^2-3c^2$	$+a^3$	$-a^2$	
Sottraendo	$-cm^2$	$-a^3$	$+2a^2$	$-3x$
Residuo	cm^2-3c^2		$+a^2$	$-3x$

E sommando giusta le regole dell' addizione il sottraendo col residuo ottenuto, torniamo ad avere il proposto minuendo.

ESERCIZIO

I. $(2cm^2-3c^2+a^3-a^2)-(a^3-2a^2+cm^2+3r) = cm^2$ $-3c^2+a^2-3r = 19$, quando sia $c = 2$, $m = 3$, $a = 5$, $r = 4$.

II. $(4a^2r-3c)-(3a^2r+3c-2r^2) = a^2r-6c+2r^2 = 15$, quando sia $a = 5$, $c = 2$, $r = 1$.

III. $(3m^2p+2m^3r^2)-(2m+4mr^3-2m^2p) = 5m^2p+2m^3r^2-2m-4mr^3$ $= -779$, quando sia $m = 1$, $p = 3$. $r = 6$.

MOLTIPLICAZIONE

52. Quattro distinti casi ci offre la moltiplicazione algebrica.

I. Caso *Monomio per monomio*
II. Caso *Polinomio per monomio*
III. Caso *Monomio per polinomio*
IV. Caso *Polinomio per polinomio*

Egli è poi a notarsi che quando uno o entrambi i fattori sono polinomi, la moltiplicazione si accenna ponendo l' un dopo l' altro chiusi tra parentesi i fattori polinomii, o conducendo sovra ciascun d' essi una linea dopo averli separati con uno dei due segni addottati per la moltiplicazione. I polinomi a moltiplicarsi essere possono ancor più di due. L' espressione per es. $(3a+c)$ $(2a^2-n)$ $(3ac+h)$... indica, che il 1° binomio dee moltiplicarsi pel 2°, che il prodotto che da essi nasce deve moltiplicarsi pel 3° ec.

può dirsi essere essa *quell' operazione per la quale si ottiene un residuo*, hanno creduto poterla definire per *quella operazione*, mediante la quale si trova la differenza fra due termini algebrici; poichè $c+p$, risultato d' una sottrazione algebrica a ben chiare note apparisce essere una somma, nè malgrado le più astruse sofisticherie che potessero addursi in campo, potrà mai questo risultato $c+p$ comunque si riguardi, essere preso per una differenza o per un residuo. Qual dunque degli insegnamenti sarà più sofistico e meno inteso dagli allievi, quello che ad essi dichiara essere $c+p$ una somma, ovvero l' altro che si ingegnasse a convincerli che è un residuo o una differenza?!

53. E poichè quando un fattore è polinomio, ogni suo termine è parte integrante di esso, ne segue che non può esserne trascurato veruno, e che perciò *debbe il prodotto risultare della moltiplicazione di ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore*. E per eseguire ordinatamente questa moltiplicazione, quando trattisi di fattori entrambi polinomii, giova moltiplicare successivamente ciascun termine del moltiplicando pel primo termine del moltiplicatore: tornare indi da capo a moltiplicare ciascun termine del moltiplicando pel 2° termine del moltiplicatore, e quindi la stessa operazione ripetere per quanti sono i suoi termini; ond'è che per ciascun di essi si ottiene un distinto prodotto parziale. Ed ecco per tutti i 4 casi di moltiplicazione un esempio.

I. Moltiplicando... a
Moltiplicatore... c

Prodotto.......... ac

II. Moltiplicando... $a+c+d$
Moltiplicatore... m

Prodotto.......... $am+cm+dm$

III. Moltiplicando... a
Moltiplicatore... $m+p+q$

Prodotto......... $am+ap+aq$

IV. Moltiplicando... $a+c+d+g$...
Moltiplicatore... $m+p+q$

Prodotto......... $am+cm+dm+gm$....
$ap+cp+dp+gp$...
$aq+cq+dq+gq$...

E da ciò apparisce che in tutti i casi nei quali o uno o ambi i fattori sono polinomii non si fa che ripetere la moltiplicazione di monomio per monomio. Egli è perciò che le regole le quali si applicano a questo primo caso di moltiplicazione valgono per tutti gli altri tre. Queste prendono di mira ciascuno dei quattro elementi di cui risultano i monomii; ed eccole

54. Regola per i segni. Dall' esposto al (§. 25) risulta che I. *il prodotto* ha sempre il segno + quando i suoi fattori hanno segni uguali, quando hanno entrambi cioè il medesimo segno, sia puro il + o il —: e II. *il prodotto* ha sempre il segno — quando i suoi fattori hanno segni contrari (*a*).

55. Regola per le lettere. Quando i monomi a moltiplicarsi risultano di più lettere diverse, si scrivono l' una presso l'altra senza frapporvi alcun segno. Così non solo in vece di $a\times c$, scrivesi ac: ma ancora in vece di $ac\times f$, scrivesi acf; in vece di $acf\times gm$, scrivesi $acfgm$; ec.

56. Regola per i coefficienti. Quando i monomi sono coefficienti diversi dall' unità, può darsi che il coefficiento esista 1° nel solo moltiplicando: 2° nel solo moltiplicatore: 3° in entrambi. Ora

I. $3c\times f = (c+c+c)f = cf+cf+cf$ (§. 53) $= 3cf$ (§. 44).

II. $c\times 3f = c(f+f+f) = cf+cf+cf = 3cf$.

III. $3c\times 2f = (c+c+c)(f+f) = cf+cf+cf+cf+cf+cf = 6cf$. Dunque da tali esempi rilevasi, che il prodotto di monomii forniti di coefficienti si ottiene colla reale esecuzione della moltiplicazione dei coefficienti tra loro, e col far seguire questo prodotto dal prodotto letterale, che è sempre una semplice indicazione (*b*).

(*a*) Da ciò deriva che se fosse opportuno talvolta cambiare il segno (porre cioè il segno contrario a quello di cui sono forniti) ad entrambi i fattori di un prodotto monomio, ciò non l' altera affatto perchè ciò facendo, se trattasi di $+\times-$, otteniamo $-\times+$ e viceversa; e il prodotto, sì dell' una che dell' altra espressione è sempre —: se trattasi di $+\times+$, otteniamo $-\times-$; e il prodotto sì dell' una che dell' altra espressione è sempre +.

Dall' esposto poi segue che non si altera affatto anche il prodotto di due polinomi se venga cambiato il segno a tutti e singoli i loro termini. Ed in vero per questo cambiamento ogni parzial prodotto monomio rimane il medesimo di prima, e perciò il medesimo anche il total prodotto che risulta dall' insieme di essi. Così $(6-4+3)(9-5-1)$ $(-6+4-3)(-9+5+1)$. Ed in vero il primo membro è $5\times3=15$; e il secondo è $-5\times-3=15$.

(*b*) Ad un tale risultato giungiamo pure immediatamente, se riflettiamo che i coefficienti non sono che moltiplicatori o fattori (§. 34); applicando ad essi le regole, che pei fattori letterali sono state stabilite, intendendoli cioè moltiplicati l' uno per l' altro collo scriverli di seguito. In fatti $3ac\times5fm = 3ac5fm$; e poichè l' inverter l' ordine dei fattori non altera il prodotto, avviciniamo i fattori numerici, dei quali si può eseguire la moltiplicazione; ed avremo in vece $3.5acfm$; e finalmente $15acfm$ eseguendo realmente la indicata moltiplicazione de' fattori numerici. Lo stesso praticando anche allorquando fossero molti i monomi a moltiplicarsi l' uno per l'altro, otteniamo il medesimo intento. Così $3a\times4cf\times2m = 3a4cf2m = 3.4.2acfm = 24acfm$.

57. Regola per gli esponenti. Quando nei diversi fattori monomii che si hanno a moltiplicare tra loro, s' incontra una stessa lettera, la loro moltiplicazione si indica più brevemente. In fatti $c^2 \times c^3 = cc \times ccc = ccccc$ (§. 556) $= c^{2+3} = c^5$. Così $acm^3 \times c^2m^2 = ac^1m^3c^2m^2 = ac^1c^2m^3m^2 = acccmmmmm = ac^{1+2}m^{3+2} = ac^3m^5$. Così $ag^2 \times cg \times a^2y^2 = ag^2cga^2y^2 = a^1a^2cg^2g^1y^2 = a^3cy^5$. Si segna dunque una sola volta nel prodotto ciascuna lettera, che si trovi replicata ne' suoi diversi fattori con un esponente, che sia la somma degli esponenti, che appartengono alla stessa lettera ne' fattori in cui trovasi.

Nel caso poi, in cui gli esponenti stessi sieno quantità indeterminate espresse da lettere, la loro somma non può essere che indicata; poichè se $a^2 \times a^3 = a^{2+3}$, può esprimersi per a^5, avendosi invece $a^m \times a^r$, il prodotto non può esprimersi, che per a^{m+r}. Così $a^{m-1} \times a = a^{m-1} \times a^1 = a^m$. Così $c^{m-n} \times c^{n+1} = c^{m+1}$.

58. Mettendo in pratica le regole ora stabilite pei 4 elementi, di cui i monomii risultano, noi otteniamo il prodotto di qualunque termino per qualunque altro, e quindi siamo in grado di eseguire la moltiplicazione in tutti e 4 i casi distinti, come ne' seguenti esempi additiamo.

ESERCIZIO

Monomio per Monomio

I. $5ac^2 \times 3c^3m = 15ac^5m = 90$, quando sia $a = 2$, $c = 1$, $m = 3$.

II. $-2cd^2 \times 4c^2d^2 = -8c^3d^4 = -5184$, quando sia $c = 2$, $d = 3$.

III. $h^2 \times -3hr^2 = -3h^3r^2 = -4800$ quando sia $h = 4$, $r = 5$.

Polinomio per monomio e viceversa

I. $(2a^2-4a^3c+c^2) \times -2c = -4a^2c+8a^3c^2-2c^3 = -89 \times -2 = +178$ quando sia $a = 3$, $c = 1$.

II. $3m^2 \times (8p-m) = 24m^2p-3m^3 = 12 \times 38 = 456$ quando sia $m = 2$, $p = 5$.

Polinomio per polinomio

In questo caso se si ottengono nella esecuzione del processo termini símili, giova porre in una prima riga il primo prodotto parziale, in una seconda riga il secondo parziale, in una terza il terzo se vi è, ec. e disponendo gli uni sotto gli altri i termini simili, e gli uni fuor degli altri i dissimili, affine di facilitarne le opportune riduzioni. Eccone vari esempi.

I. Esempio senza riduzione $(3ac^2-2f^2g^3+h)\ (2h-f)$

Moltiplicando . . . . $3ac^2-2f^2g^3+h$
Moltiplicatore . . . . $2h-f$.

1° *Prodotto parziale* $6ac^2h-4f^2g^3h+2h^2$
2° *Prodotto parziale* . . . . $-3ac^2f+2f^3g^3-fh$

Prodotto totale . . . $6ac^2h-4f^2g^3h+2h^2-3ac^2f+2f^3g^3-fh$

II. Esempio con riduzione $(2a^3+a^2c+3ac^2+c^3)\ (a-2c)$

Moltiplicando . . . . $2a^3+a^2c+3ac^2+c^3$
Moltiplicatore . . . . $a-2c$

1° *Prodotto parziale* $2a^4+a^3c+3a^2c^2+ac^3$
2° *Prodotto parziale* $-4a^3c-2a^2c^2-6ac^3-2c^4$

Risultato ridotto . . $2a^4-3a^3c+a^2c^2-5ac^3-2c^4$

III. Esempio con riduzione $(4mo+7np-2a^2)(4mo-7np+2a^2)$

Moltiplicando . . . . $4mo+7np-2a^2$

Moltiplicatore . . . . $4mo-7np+2a^2$

1° *Prodotto parziale* $16m^2o^2+28mnop-8a^2mo$

2° *Prodotto parziale* . . . $-28mnop \quad -49n^2p^2+14a^2np$

3° *Prodotto parziale* . . . . $+8a^2mo \quad +14a^2np-4a^4$

Risultato ridotto . . $16m^2o^2$ . . . . $-49n^2p^2+28a^2np-4a^4$

IV. $(2gp-c)(4g^2p^2+2cgp+c^2) = 8g^3p^3-c^3 = 13816$, quando sia $g = 3$, $p = 4$, $c = 2$.

V. $(x^2z+xz+x)(xz+x+1) = x^3z^2+x^2z^2+3x^2z+x^3z+x^2+xz+x = 20$, quando sia $x = 1$, $z = 2$.

OSSERVAZIONI

59. Nella moltiplicazione di *monomio* per *monomio* nulla v' è a rimarcarsi.

In quella *di polinomio per monomio* si noti che il prodotto risulta di tanti termini quanti ne ha il moltiplicando.

In quella di *monomio per polinomio* il prodotto ha tanti termini quanti ne ha il moltiplicatore.

Nella moltiplicazione di *polinomio per polinomio* il prodotto totale I° è composto sempre di tanti prodotti parziali quanti sono i termini del moltiplicatore: II° tanti sono i termini di ogni prodotto parziale, quanti son quelli del moltiplicando: III° perciò, se non vi è stata riduzione, il numero de' termini del prodotto totale è lo stesso numero dei termini del moltiplicando ripetuto tante volte quanti sono i termini del moltiplicatore, vien cioè precisato dal prodotto del numero de' termini del moltiplicando pel numero de' termini del moltiplicatore, e viceversa; quindi è sempre un *multiplo* di ciascuno de' suoi fattori: IV° nei prodotti poi, in cui ha luogo la riduzione, se v' è termine, in cui una lettera abbia un esponente maggiore di quello che ha negli altri, come nel 2° esempio del IV. caso è il primo monomio $2a^4$, ove a ha un esponente maggiore, che ne' seguenti termini, in tal circostanza siamo certi, che questo termine, ove la lettera ha l' esponente massimo è stato esente da riduzione, perchè non può risultare che dal solo termine del moltiplicando e da quello del moltiplicatore, ove la stessa lettera abbia il maggiore esponente.

60. Finalmente se noi osservammo in genere (§. 9), che le operazioni algebriche lasciando sempre vedere come i diversi termini concorrano alla formazione dei risultati, per esser le lettere da cui sono espressi non suscettibili di trasformarsi in altre come il sono le cifre, spesso conoscer ci fanno delle proprietà generali dei numeri indipendenti da qualsiasi sistema di numerazione, ora la moltiplicazione ce ne dà qualche esempio speciale. In fatti in grazia di essa troviamo le seguenti verità.

Teorema $(a+c)(a-c) = a^2-c^2$, cioè *la somma di due numeri moltiplicata per la loro differenza dà per prodotto la differenza de' quadrati di questi numeri* Così $(2m^2+3a)(2m^2-3a) = 4m^4-9a^2$; $(10+3)(10-3) = 100-9 = 91$.

Teorema $(a+c)(a+c) = a^2+2ac+c^2$, *cioè il* quadrato *della somma di due numeri risulta del quadrato del primo, più il doppio del prodotto del 1° nel 2°, più il quadrato del 2°. Così* $(3m^2p+2a)^2 = 9m^4p^2+12am^2p+4a^2$; $(5+4)(5+4) = 25+40+16$.

Teorema $(a^3+a^2c+ac^2+c^3)(a-c) = a^4-c^4$, cioè *la somma de' cubi di due numeri e dei quadrati di ciascun di essi moltiplicati per l' altro numero, se venga moltiplicata per la differenza de' due dati numeri dà per prodotto la differenza delle quarte potenze de' due numeri stessi*.

E questi teoremi interessanti per sè stessi in vari casi servono ancora ad abbreviare i calcoli. Così nel III° esempio (§. 58) si vede facilmente che si cerca il prodotto di $4mo+(7np-2a^2)$ per $4mo-(7np-2a^2)$ ossia si cerca il prodotto della somma di due numeri per la loro differenza e perciò si avrà subito prendendo la differenza del quadrato di $4mo$ e di $(7np-2a^2)$ prendendo cioè $(4mo)^2-(7np-2a^2)^2 = 16m^2o^2-49n^2p^2+28a^2np-4a^4$, risultato identico a quello che colla diretta esecuzione della moltiplicazione abbiamo ottenuto.

DIVISIONE

61. Occorrono nella divisione gli stessi quattro casi che nella moltiplicazione abbiamo distinti (§. 52). E poichè per di lei mezzo ricercasi quel fattore incognito detto quoto, che moltiplicato pel divisore dà per prodotto il dato dividendo, è chiaro che se il dividendo non risulta realmente dalla moltiplicazione d' un fattore per un altro, la divisione non può effettuarsi, come nel caso di $(a+m):(c-n)$ nel quale siamo obbligati a rimanerci alla semplice indicazione. A differenza dunque della moltiplicazione che la è sempre, la divisione è eseguibile allora solo che il divisore è un fattore algebrico del dividendo, mentre in tal caso unicamente per mezzo di operazioni contrarie a quelle che si fanno nella moltiplicazione, decomponendo cioè quello che la moltiplicazione ha composto, facciamo regresso dal prodotto a quello de' suoi fattori, che non si conosce e che è appunto il quoto della divisione, come ci mostrano i 4 casi seguenti.

I. Divisione di monomio per monomio.

62. Questa divisione può effettuarsi allora soltanto, che il divisore monomio abbia 1° il coefficiente eguale o submultiplo del coefficiente del dividendo: 2° tali le sue lettere che niuna ve n' abbia che non esista nel dividendo: 3° e i loro esponenti non maggiori di quelli, che le stesse lettere hanno nel dividendo, poichè ha d' uopo di tali condizioni il divisore, affinchè possa realmente essere fattore del dividendo; e quindi rendere eseguibile la divisione (§. 61). Per effettuarla poi vi sono 4 regole relative ai quattro elementi, di cui ogni monomio risulta.

63. Regola per i segni. Tal segno aver debbe il quoto, che moltiplicato pel divisore dia il dividendo. Ed ecco ciò che risulta per tutti e quattro i casi possibili.

I. *Debba dividersi* $+$ *per* $+$. Per le regole della moltiplicazione si ha che un fattore $+$, qual' è il divisore, non può dare un prodotto $+$ qual' è il dividendo, se non è $+$ l' altro fattore, cioè il quoto. Dunque $+:+$ dà $+$.

II. *Debba dividersi* $-$ *per* $+$. Un fattore $+$, qual' è il divisore, non può dare un prodotto $-$, qual' è il dividendo, se non è $-$ l' altro fattore, cioè il quoto. Dunque $-:+$ dà $-$.

III. *Debba dividersi* $+$ *per* $-$ Un fattore $-$, qual' è il divisore, non può dare un prodotto $+$ qual' è il dividendo, se non è $-$ l' altro fattore cioè il quoto. Dunque $+:-$ dà $-$.

IV. *Debba dividersi* $-$ *per* $-$. Un fattore $-$, qual' è il divisore, non può dare un prodotto $-$ qual' è il dividendo, se non è $+$ l' altro fattore, cioè il quoto. Dunque $-:-$ dà $+$.

Dunque siccome avviene nella moltiplicazione (§. 26), così anche *nella divisione i segni uguali danno* $+$; *e danno* $-$ *gli opposti* (*a*).

64. Regola per le lettere non affette da espresso coefficiente. Poichè la moltiplicazione algebrica si fa colla unione delle lettere esprimenti i fattori, è chiaro che il dividendo, per essere il prodotto del divisore pel quoto, risultare debbe delle lettere indicanti il divisore unite a quelle esprimenti il quoto; sicchè soppresse nel dividendo le lettere appartenenti al divisore, le altre sono del quoto. Così dato $ac:c$ sopprimendo nel dividendo ac la lettera c, che esprime il divisore, la rimanente a debbe essere il quoto; ed infatti moltiplicando il divisore, c pel quoto a, si riottiene il dividendo ac. Così in $acmpr:cp$, tolte via dal dividendo le lettere c, p constituenti il divisore, resta amr per quoto. Ed infatti moltiplicando il divisore cp per amr, riotteniamo il dividendo $acmpr$. Dunque *per avere il quoto si scrivono i soli fattori del dividendo non comuni al divisore*. Questa è la regola generale di cui non sono che un'

(*a*) Quindi anche nella divisione si verifica quanto nella moltiplicazione osservammo (Nota al §. 54) che cioè il risultato rimane lo stesso quando cambiasi il segno ad entrambi i termini dell' operazione. Ed in vero fatto questo cambiamento $^{+}/_{+}$ diviene $^{-}/_{-}$ e viceversa; e il quoto in entrambi i casi è $+$: così pure $^{-}/_{+}$ diviene $^{+}/_{-}$ e viceversa; e il quoto in entrambi i casi è $-$. Il medesimo si verifica anche quando il divisore è polinomio. Così

$$^{18-6}/_{5-1} = ^{+12}/_{+4} = +3;$$

e cambiando i segni abbiamo

$$^{-18+6}/_{-5+1} = ^{-12}/_{-4} = +3.$$

applicazione le altre pei coefficienti, ed esponenti.

65. Regola per i coefficienti. Se i monomii a dividersi sono affetti da coefficienti, p. es. $36ac : 9a$, in tal caso poichè il coefficiente 36 debbe esser prodotto dal 9 coefficiente del divisore moltiplicato pel coefficiente incognito del quoto (§. 56), questo si otterrà colla real divisione di 36 per 9; e perciò sarà 4, poichè $36 = 4 \times 9$. Essendo infatti $36ac : 9a$ lo stesso che $4.9ac : 9a$, tralasciando nel dividendo a tenor della regola (§. 64) tutti i fattori sì numerici che algebrici comuni al divisore, risulta per quoto $4c$. *Si pone dunque per coefficiente del quoto il numero che risulta dal dividere il coefficiente del dividendo per quello del divisore*. A tenor di questa regola, se si ha $4ac : 4a$, sendo $4 : 4 = 1$, il quoto sarà $1c$; ed in tal caso si può tralasciare nel quoto il coefficiente 1, che abbiamo ottenuto, imperciocchè $1c = c$. Ma se si avesse $4ac : 4ac$, il numero 1, che in questo esempio otteniamo per coefficiente del quoto non può trascurarsi; poichè se è indifferente scrivere o non scrivere l'unità innanzi ad una lettera, perchè s'intende che è posta una volta, quando trovasi scritta sebbene non abbia la cifra 1 alla sua sinistra, non così è indifferente scrivere o non scrivere la cifra 1, quando non è seguita da lettera alcuna, come nel caso citato, in cui tolte dal dividendo le lettere comuni al divisore, nulla vi resta, giacchè non v'è in Matematica la convenzione, che quando nulla si vede debba sottintendersi l'1. Così quando abbiasi $a : a$, $cmp : cmp$, ec. non si creda, che in forza della regola (§. 55) il quoto sia zero, poichè rammentar conviene, che ogni monomio è affetto da coefficiente, e quindi che $a : a = 1a : 1a$; e perciò a tenor della regola de' coefficienti il quoto di $1a : 1a$ è 1, e non 0, risultato, che corrisponde alla massima che qualunque quantità divisa per sè stessa è uguale ad 1.

66. Regola per gli esponenti. Nei due termini della divisione possono essere delle lettere uguali affette da esponenti per es. $a^5 : a^3$. In tal caso poichè $a^5 : a^3 = aaaaa : aaa$ (§. 57), operando a tenor della regola (§. 64) otteniamo per quoto $aa = a^2$. Così $m^2p^4r^3 : mp^2r^2 = mmpppprrr : mpprr = mp^2r$; e così $a^3e^2m : a^3c^2 = aaaccm : aaace = m$ (§. 64). Così pure $a^8m^nr : a^3m^4 = a^5m^{n-4}r$. Così $x^my^{n-1}z^{n+1} : xyz = x^{m-1}y^{n-2}z^n$; Così $a^{n+1}c^{1-n}ps^3 : a^nc^{1-n}ps^3 = a$; ed in genere conchiudere possiamo, che *le lettere comuni ai termini della divisione si scrivono nel quoto con un esponente, che sia quello che hanno nel dividendo diminuito di quello che hanno nel divisore, o non si scrivono se l'hanno uguale*. In tal guisa infatti noi aggiungendo all'esponente di ciascuna delle lettere del quoto quell'esponente, che la stessa lettera ha nel divisore (lo che appunto facciamo, quando moltiplichiamo il divisore pel quoto) torniamo a riottenere in ognuna quell'esponente stesso che hanno nel dividendo, il quale dal divisore moltiplicato pel quoto debbe essere prodotto.

67. Per eseguire dunque la divisione di monomio per monomio conviene 1° *apporre al quoto il segno + o — secondo che i segni del dividendo e divisore sono uguali o contrari*: 2° *dividere il coefficiente del dividendo per quello del divisore, e scrivere il risultato per coefficiente del quoto*: 3° *scrivere le lettere del dividendo che non sono comuni al divisore coll'esponente che hanno*: 4° *non scrivere quelle lettere comuni che hanno nel dividendo un esponente uguale a quello che hanno nel divisore, e quelle scrivere che l'hanno maggiore con l'eccesso dell'esponente che hanno nel dividendo sull'esponente che hanno nel divisore*.

ESERCIZIO

$12a^2cx^3y$	: $12ax^3y$	=	acx^2	$-28a^4c^3f$	: $-7a^4f$	=	$4e^3$
$-21m^3q^2$	: $-3m^3q$	=	$7q$	$-30a^3d^2m$	: $6a^3dm$	=	$-5d$
$-8a^2h^4m$	: $4a^2h^2$	=	$-2h^2m$	$9mpr$	: $-9mpr$	=	-1
$-a^mz^{n+1}$	: $a^{m-1}z^2$	=	$-az^{n-1}$	a^nc^{m+n}	: ac^{m-1}	=	$a^{n-1}c^{n+1}$
$a^{m+n}c^{n+1}$	: $a^{m-n}c^{1-n}$	=	$a^{2n}c^{2n}$	$81p^{2m}$	: $9p^{2m-r}$	=	$9p^r$

Divisione di polinomio per monomio.

68. Sia per es. a dividersi $af+cf+df$ per f. Per eseguire una tal divisione fa d' uopo che il dividendo sia realmente il prodotto del divisore monomio f per un altro fattore incognito x, che è appunto il quoto che si ricerca: conviene cioè che sia $f\times x = af+cf+df$. Ora affinchè abbia potuto il fattore f dare un prodotto di tre termini quale è $af+cf+df$, fa d' uopo che l' altro fattore o quoto x per cui si è moltiplicato, sia di tre termini (§. 59 II.) risulti cioè di tanti termini, quanti son quelli del dividendo, e precisamente conviene che tutti e singoli i termini del dividendo, sieno il risultato del fattore f moltiplicato per tutti e singoli i rispettivi termini del quoto ossia che il divisore f esista come fattore in tutti i termini del dividendo. Per tale oggetto le 3 condizioni stabilite (§. 62) conviene che si verifichino nel divisore relativamente ad un solo non già, ma rapporto a tutti quanti sono i singoli termini del dividendo, ed allora dividendoli realmente pel divisore f, risulteranno i rispettivi termini del quoto. Questo 2° caso di divisione non è perciò che una ripetizione del 1° fatta tante volte, quanti sono i termini del dividendo, e la divisione si dispone, e si eseguisce a guisa delle divisioni aritmetiche, come qui sotto.

	Dividendo	Divisore
	$af+cf+df$	f
	$-af$	$a+c+d$ Quoto
1° Resto	$+cf+df$	
	$-cf$	
2° Resto	$+df$	
	$-df$	
	0	

Cominciando a sinistra 1° *si divide il primo termine* af *del dividendo pel divisore* f; *e si segna nel posto del quoto il quoto parziale* a *che si ottiene.* 2° *Questo moltiplicasi pel divisore* f, *e l' ottenuto prodotto* af *si scrive col segno opposto sotto il termine del dividendo su cui si è operato per eseguire la sottrazione.* 3° *Si fa poi la riduzione per sopprimere nel dividendo quel termine che ha già soddisfatto alla determinazione del corrispondente quoto parziale, e quindi sul primo resto* cf+df *s' opera in egual modo per ottenere il* 2° *termine del quoto, e così successivamente, finchè si abbia zero per ultimo residuo.* Questo residuo zero infatti ci attesta che la quantità f essendo stata tolta $(a+c+d)$ volte dal dividendo, vi è contenuta esattamente, ovvero che $f\times(a+c+d)$ dà il dividendo $af+cf+df$, d' onde la immediata conseguenza che $(a+c+d)$ è il quoto poichè è quel fattore che moltiplicato pel divisore dà il dividendo.

In simil guisa operando, otteniamo $(4a^5m^4-12a^3m^2+2a^2m^3):2a^2m = 2a^3m^3-6am+m^2$: così pure $(15c^2g^3-5cg^2-10c^2g^2):5cg^2 = 3cg-1-2c$.

III. Divisione di monomio per polinomio.

69. Questa divisione non è giammai algebricamente eseguibile in modo, da far risultare un quoto esatto espresso da quantità intere. Non può infatti idearsi quantità alcuna nè monomia nè polinomia, che moltiplicata per un divisor polinomio dar possa un prodotto monomio, come in questo caso dar dovrebbe il quoziente. Queste sorte di divisioni come per esempio $a:(1-c)$ non possono perciò che indicarsi; e se si tenta effettuarle, si ottiene al posto del quoto un seguito di termini senza fine che costituisce il così detto *sviluppo de' quoti in serie infinite convergenti*, o *divergenti*, la cui disamina non appartiene all' Algebra elementare.

IV. Divisione di polinomio per polinomio

70. Perchè possa questa divisione eseguirsi, necessita come negli altri casi, che il dividendo sia il risultato d' una reale moltiplicazione del divisore, che in questo caso è un polinomio, per un' altra quantità monomia o polinomia che è il quoto che si ricerca. E prima di ogni altro fa d' uopo ordinare per una stessa lettera i termini sì del dividendo che del divisore polinomio.

L' Ordinamento dei polinomii consiste nel prendere di mira una qualunque di quelle lettere che esistono in più termini: sempre però tra le altre quella sciegliere è meglio che in essi è più volte ripetuta: quindi disporre i termini in modo, che prima a sinistra, uno dopo l' altro (se ve n' è più d' uno) sieno i termini ove la lettera scelta che dicesi la dominante abbia l' esponente massimo, poi un dopo l' altro tutti quelli (se ve n' è più d' uno) ove la lettera ha un esponente maggiore, che in tutti gli altri termini rimasti: e così successivamente, e

in fine sieno quelli, ove la data lettera non esiste. E quando poi vi sono più termini nei quali la dominante è affetta da uno stesso esponente, questi vanno ordinati rispetto ad un'altra lettera, ed è bene che anche per questa *seconda dominante* sia scelta una di quelle lettere che trovasi la più ripetuta nei termini (a).

* 71. Per ben analizzare il processo della divisione polinomia teniamo dietro ai seguenti riflessi.

Veggendo che $(a+c)(n+p) = an+cn+ap+cp$, noi siamo certi che questo quadrinomio può benissimo riguardarsi per dividendo quando per divisore si prenda un qualunque dei due fattori binomi che lo formano, per es. $a+c$. Infatti in tal caso l'altro fattore $n+p$ rappresentar debbe il quoto che ora ci figuriamo di non conoscere, e che perciò ci facciamo a ricercare. Non essendo accaduta riduzione alcuna nell'indicato dividendo, ogni suo termine è il diretto risultato della moltiplicazione di un qualche termine del divisore per un qualche termine del quoto. Il 1° termine an è dunque prodotto dal 1° termine a del divisore per uno dei termini ignoti del quoto, che si rileverà tosto essere n, dividendo pel termine a del divisore il primo termine del dividendo. Essendo n un termine del quoto, nel dividendo esister deggiono i termini, che nascono dal moltiplicare per n tutti i termini del divisore $a+c$ cioè $an+cn$, poichè essi formano uno de' parziali prodotti che costituiscono il prodotto totale cioè il dividendo. Togliendo percio da esso questi due termini, il residuo $ap+cp$ che risulta esprimerà l'altro parzial prodotto, o l'assieme degli altri prodotti parziali che costituiscono con quello che si è sottratto il total dividendo. Ora il 1° termine ap di questo residuo non può altrimenti esser prodotto che dal termine a del divisore moltiplicato per un altro termine del quoto che tosto, per mezzo della divisione di ap per a, apparisce esser p. Dunque p è un altro termine del quoto; e perciò nel dividendo debbono esistere i termini costituenti il prodotto parziale di tutto il divisore $a+c$ per p, cioè $ap+cp$. Togliamo dunque dal dividendo anche questi; e poichè dopo tolti, nulla abbiam più di residuo, conchiudiamo che $n+p$ è il quoto di $(an+cn+ap+cp):(a+c)$. Tolto infatti dal dividendo il prodotto di $a+c$ per n, indi il prodotto di $a+c$ per p, ossia tolto dal dividendo il prodotto di $(a+c)$ per $(n+p)$, zero è stato il residuo. Dunque il dividendo è uguale al prodotto di $(a+c)$ in $(n+p)$; dunque $(n+p)$ è quel fattore che moltiplicato pel divisore $a+c$ dà un prodotto uguale al dividendo: dunque desso è il quoto cercato.

* 72. Quando i dividendi sono, come nel citato esempio, dei prodotti, nei quali non ha avuto luogo la riduzione, la divisione sempre riesce bene, qualunque sia l'ordine de'termini del dividendo e del divisore. Non così quando alcuni termini del dividendo sono stati il risultato d'una riduzione. Infatti se si avesse $(a^2+2ac+c^2):(a+c)$, noi già sappiamo (§. 60), che il dato dividendo è una quantità prodotta da $(a+c)(a+c)$, e che perciò il quoto della proposta divisione è $(a+c)$; ma se noi nella supposizione che il quoto fosse ignoto, tentassimo di ottenerlo, tosto ci accorgeremmo che, se i termini del dividendo, e divisore sono disposti come sopra, la divisione riesce a meraviglia: non così però se i termini fossero diversamente collocati; se per es. si avesse $(2ac+a^2+c^2):(a+c)$. In tal caso infatti cominciando a dividere il 1° termine $2ac$ del dividendo pel 1° termine a del divisore, otteniamo per primo termine del quoto $2c$, che sappiamo non appartenergli; e ciò nasce perchè il $2ac$ che troviamo nel dividendo non è un termine che sia immediatamente risultato dalla semplice moltiplicazione, ma dalla riduzione che poi si è fatta. Dunque allora solo certi noi siamo che si ottengono de' veri termini al quoto, quando si dividono per un qualche termine del divisore que' termini del dividendo su cui non è caduta riduzione, e

(a) Per conoscere l'utilità di questo ordinamento dei termini del dividendo e del divisore nella esecuzione della divisione polinomia, e l'origine investigare e le ragioni dei suoi processi, fa d'uopo studiare la materia esposta (§. 71 al §. 76). Preponiamo però a questi paragrafi un asterisco, per denotare (siccome faremo in altre simili circostanze) che si può di questi differire la spiegazione agli allievi a più innoltrato insegnamento, quando cioè abbiano essi preso maggiore famigliarità coi ragionamenti algebrici, passando subito al dettaglio del processo al §. 77.

che sono perciò il puro prodotto di un termine del divisore per un termine del quoto. Convien dunque dar principio alla divisione da que' termini del dividendo su cui si abbia certezza che non sia caduta riduzione, per esser certi che il risultato che si ottiene sia realmente un termine del quoto. Ecco la prima regola che dalle esposte riflessioni discende. E se que' prodotti di un fattore noto e di uno incognito che ci vengono offerti per dividendi, caratteri ci offrissero per i quali potessimo distinguere quali hanno subita riduzione, e quali nò, per questi ultimi almeno, da qualunque termine si cominciasse la divisione, certi saremmo di operar bene: ma criteri generici per tale esplorazione ci mancano; e ben possiamo aver certezza che la riduzione ha avuto luogo in quei dividendi il numero de' cui termini non è multiplo del numero de' termini nel divisore che è uno de' suoi fattori, perchè ogni prodotto che non ha sofferto riduzione ha un numero di termini multiplo di quello di ciascun de' fattori suoi (§. 59 III.); ma non possiamo viceversa aver la certezza che la riduzione non abbia avuto luogo in que' dividendi il numero de' cui termini è multiplo esatto del divisore, poichè tale potrebbe anche rimanere se la riduzione avesse fatto sparire nel dividendo un numero di termini eguale a quelli del divisore, o il doppio, o il triplo, ec. In mezzo però all' incertezza intorno al sapere, se in genere i prodotti che ci si propongono per dividendi, abbiano subita o nò riduzione, si ha il vantaggio di conoscerne uno fra i termini del prodotto che siamo certi esserne stato esente, e tale è quello ove una data lettera ha il massimo esponente (§. 59 IV.), e tanto ci basta. Questo infatti noi sceglieremo per primo a dividersi, e lo divideremo per quel termine del divisore in cui parimente la stessa lettera abbia l' esponente più alto, sicuri di ottenere per risultato un vero termine del quoto, e precisamente quello ove la stessa lettera ha il massimo esponente, poichè quel termine di un prodotto, ove una data lettera è elevata alla più alta potenza, non può risultare che dalla moltiplicazione di quel solo termine di un fattore per quel solo dell' altro ove la stessa lettera ha il maggiore esponente.

* 73. Di quì la necessità di quella *operazione preparatoria*, che si premette alla divisione detta *ordinamento*. Ed a conoscere poi come il processo della divisione polinomia abbia avuto naturalmente origine, valga il tener dietro a due esempi, nel 1° dei quali l' esponente della lettera dominante sta decrescente in ciascuno dei successivi termini del dividendo, e del divisore o almeno di uno di essi, e nel II° vi sieno dei termini tanto nel dividendo che nel divisore in cui la dominante possegga il medesimo esponente.

* 74. I. Debba dividersi $14c^6m+4c^2m^2r-12c^4m^2-4c^8-2c^4mr$ per $mr+2c^4-3c^2m$. Ordinati questi polinomi rispetto ad una lettera qualunque per es. alla c, rimarchiamo che in ogni successivo termine del divisore la c ha un esponente minore, e quindi si eseguisca la divisione come qui esponiamo.

	Dividendo	Divisore
	$-4c^8+14c^6m-12c^4m^2-2c^4mr+4c^2m^2r$	$2c^4-3c^2m+mr$
(A)	$+4c^8-6c^6m+2c^4mr$	Quoto
(B)	$8c^6m-12c^4m^2+4c^2m^2r$	$-2c^4+4c^2m$
(C)	$-8c^6m+12c^4m^2-4c^2m^2r$	
	0 0 0	

Si divide $-4c^8$ primo termine del dividendo ordinato, per $2c^4$ primo termine del divisore. Il $-2c^4$ che si ottiene siamo certi dover essere il 1° termine del quoto (§.59.IV), e siamo pure certi che in tutti gli altri termini seguenti del quoto la dominante c aver debbe un esponente più piccolo. Nel posto del quoto si segna perciò il $-2c^4$. E poichè il dividendo per essere il prodotto del divisore polinomio pel quoto polinomio, risultar debbe di tutti i prodotti parziali del divisor polinomio $2c^4-3c^2m+mr$ per ciascun termine del quoto, è chiaro che contener deve il prodotto $-4c^8+6c^6m-2c^4mr$, che noi otteniamo moltiplicando il divisore per l' ora scoperto 1° termine del quoto. Sottraendo questi termini dal dividendo, il che si ottiene collo

scriverli col segno opposto sotto i rispettivi termini simili del dividendo, come si è fatto nella espressione contrassegnata per (A), è chiaro che il residuo (B) che otteniamo fatta la riduzione, altro non contiene che que' prodotti, che risultano dalla moltiplicazione del divisore pel 2°, pel 3° ecc. termine del quoto. Ora il termine $8c^6m$ primo fra tutti i termini di questo residuo deriva dall' avere sottratto dal $14c^6m$ (2° termine del dividendo) il prodotto del 2° termine del divisore pel termine 1° del quoto. Ma questo $14c^6m$ (2° termine del dividendo) contiene la dominante c elevata al maggiore esponente che si abbia dopo il termine 1° del dividendo: dunque non può risultare al più, che dei due prodotti formati dal 1° termine del divisore moltiplicato pel 2° termine del quoto, e dal 1° del quoto pel 2° termine del divisore, giacchè quand' anche nei successivi termini del quoto l' esponente di c non andasse a decrescere, decrescendo esso però nel nostro caso in tutti i successivi termini del divisore, i prodotti di qualunque altro termine del divisore per qualunque altro termino del quoto, deggiono necessariamente avere la dominante c elevata ad un esponente minore, ed essendo perciò necessariamente dissimili dal prodotto del 1° termine del divisore pel 2° del quoto e dal prodotto del 1° del quoto pel 2° del divisore, non possono trovarsi riuniti nel 2° termine del dividendo che nel caso nostro è $14c^6m$. Esso dunque risulta per la riduzione additiva di que' due soli prodotti, cosicchè quando vi abbiamo tolto $6c^6m$ prodotto del 2° termine del divisore pel 1° del quoto, ciò che rimane, egli è certo essere il solo prodotto del 1° termine del divisore pel 2° termine del quoto; è perciò questo 2° termine del quoto che è tutt'ora incognito e che rimane a scuoprirsi, si otterrà tosto, dividendo il prodotto $8c^6m$ per l' altro fattore noto che è il 1° termine del divisore, cioè per $2c^4$: quindi il risultato di questa divisione, che è $4c^2m$, si scrive accanto al 1° termine del quoto. Ma se il quoto è un fattore del dividendo, anche il prodotto parziale di questo secondo suo termine ora trovato moltiplicato per tutti i termini del divisore debbe trovarsi nel dividendo; e perciò per questo $4c^2m$ nuovo termine del quoto si moltiplicano tutti i termini del divisore, e i prodotti $8c^6m$ $-12c^4m^2+4c^2m^2r$ si sottraggono dal residual dividendo, scrivendoli sotto i suoi rispettivi termini simili con i segni opposti, come si è fatto in (C); e poichè dopo la riduzione si ha zero di resto, conchiudiamo che nulla rimane del dividendo dopo che gli si è prima tolto il prodotto di $(2c^4-3c^2m+mr)\times-2c^4$, e quindi il prodotto dello stesso $(2c^4-3c^2m+mr)\times4c^2m$, ossia dopo che gli si è tolto il prodotto totale di $(2c^4-3c^2m+mr)\times(-2c^4+4c^2m)$. Ora se il dividendo diventa zero dopo che gli si è tolto l' ora esposto prodotto, ciò è un dire che questo prodotto è uguale al dividendo. Dunque $(-2c^4+4c^2m)$ è tale quantità che moltiplicata pel divisore dà il dividendo. Ma quella quantità che moltiplicata pel divisore dà il dividendo, si chiama quoto: dunque $-2c^4+4c^2m$ è il quoto cercato.

* 75. In questo esempio nella 2ª sottrazione si è avuto zero di resto; ma se fosse risultato un residuo, ciò proverebbe (quando il dividendo è un multiplo esatto del divisore) che il quoto contiene un altro termine almeno. Ed atteso l' ordinamento dei polinomii il 1° termine di questo residuo non potrebbe risultare d' altro, che del primo termine del divisore moltiplicato per il terzo termine del quoto; e perciò questo terzo termine del quoto che si ricerca si ottiene dividendo l' ottenuto 1° termine del secondo residuo pel 1° termine del divisore. Così di seguito il primo termine del terzo residuo che si ottenesse non potrebbe essere che il 1° termine del divisore moltiplicato pel 4° termine del quoto, e perciò dividendolo pel primo termine del divisore, si avrebbe il quarto termine del quoto, ecc.

* 76. II. Debba ora dividersi il polinomio $a^3c+a+a^3c^2+a^2+a^2c^2+ac+3a^2c$ per $a+ac+1$. Ordinando i termini rispetto alla lettera a, noi troviamo che vanno posti prima degli altri quelli nei quali esiste a^3: ma essendovene due, quello di essi aver debbo la precedenza in cui un altra lettera qualunque (e la c nel nostro caso) ha l' esponente maggiore; e perciò dobbiamo scrivere « $a^3c^2+a^3c$ » e non viceversa. Poscia dobbiamo porre i termini ove esiste a^2; e questi essendo tre, cioè a^2, a^2c^2 e $3a^2c$, vanno ordinati per rapporto alla lettera c, e vanno perciò scritti così « $a^2c^2+3a^2c+a^2$ ». Finalmente dobbiamo porre i termini ove esiste a^1, cioè a ed ac, e questi pure vanno ordinati ri-

spetto alla c scrivendo « $ac+a$ ». Ed usando le stesse avvertenze rapporto al divisore $a+ac+1$, esso dovrà essere scritto con quest' ordine $ac+a+1$. Ordinati così il dividendo ed il divisore, ecco qui sotto il processo della divisione.

$$
\begin{array}{r|l}
a^3c^2+a^3c+a^2c^2+3a^2c+a^2+ac+a & ac+a+1 \\
-a^3c^2-a^3c \qquad\quad -a^2c \qquad\qquad\qquad & \overline{a^2c+ac+a} \\
\hline
+a^2c^2+2a^2c+a^2+ac+a & \\
-a^2c^2-\ a^2c \qquad -ac \quad\ & \\
\hline
+\ a^2c+a^2 \qquad +a & \\
-\ a^2c-a^2 \qquad -a & \\
\hline
0 \quad 0 \qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

E qui è a rimarcarsi che la dominante a non solo è affetta da un medesimo esponente in più termini del dividendo ma anche in alcuni del divisore. Ora questa circostanza può far sì che altri termini del divisore moltiplicati per qualche altro successivo termine del quoto dieno per prodotto un termine avente la dominante affetta dal medesimo esponente, che ha il prodotto del 1° termine del divisore pel 2° del quoto, ma non mai un termine simile ad esso per la ragione che se nei successivi termini del divisore non è decrescente la prima dominante, lo è la seconda, e ciò basta perchè (ragionandosi rispetto ad essa, come nell' altro esempio si fece rispetto alla dominante unica) si vegga che il 1° termine del 1° residuo è il puro prodotto del 1° termine del divisore pel 2° del quoto, che il 1° termine del 2° residuo è il solo prodotto del 1° termine del divisore pel 3° del quoto, ec., cosicchè dividendo questi prodotti pel 1° termine del divisore, risultano i successivi termini del quoto che si ricercano. Dalle esposte riflessioni ha tratto origine il processo della divisione polinomia, processo le cui regole possono compendiarsi come segue.

77. *Nella divisione di polinomio per polinomio*, I. *ordinati che sieno il dividendo e il divisore, si dispongono come nella divisione dei numeri*, *questo a destra di quello*. II. *Pel* 1° *termine del divisore dividesi il* 1° *del dividendo*, *e nel posto assegnato al quoto si scrive il risultato*. III. *Per esso moltiplicasi tutto il divisore, e i termini del prodotto si scrivono col segno opposto sotto il dividendo, in modo che i termini simili che vi sono si corrispondano*. IV. *Si fa la riduzione ; ed il resto che per di lei mezzo si ottiene riguardasi come un nuovo dividendo*, *il cui* 1° *termine perciò dividesi pel* 1° *del divisore: si scrive il risultato pel* 2° *termine nel quoto, e si proseguono le stesse ora indicate operazioni*, *finchè giungasi ad avere zero di resto*. E questo zero di resto che si ottiene dopo di aver sottratto dal dividendo di mano in mano che si sono ottenuti tutti i parziali prodotti dell' intero divisore per ciascuno dei successivi termini che abbiamo segnati nel posto del quoto, ci prova che hanno essi appunto la caratteristica del quoto, di produrre cioè il dividendo allorchè sono moltiplicati pel divisore.

Si applichino queste regole agli esempi del §. 74 e 76.

78. Talvolta il polinomio dato a dividersi non è un esatto multiplo del divisore; ma contiene qualche altro termine ancora, ed in tal caso si opera come si è addietro indicato, finchè si giunge ad un residuo il cui primo ed unico termine non sia divisibile pel 1° termine del divisore. In tal caso il resto unito al prodotto del quoto pel divisore torna a dare il dividendo. Così passando a dividere $(6a^2-2am+3m^2)$ per $(3a-m)$ risulta per quoto $2a$, si ha per residuo $3m^2$; e vediamo che $2a(3a-m)+3m^2 = 6a^2-2am+3m^2$.

79. Vi sono dei casi, in cui le moltiplicazioni di differenti termini del quoto pel divisore producono dei termini che non sono nel dividendo, e che dopo la riduzione (facendo essi parte del residuo) bisogna poi dividere pel primo termine del divisore affine di proseguire l' operazione. Questi sono que' termini che si distrussero quando si formò il dividendo colla moltiplicazione de' suoi fattori divisore e quoto, e che non possono a meno di non riprodursi nella formazione dei prodotti parziali di un fattore (qual è il divisore) per ciascun termine dell' altro, quale è il quoto. Infatti se la moltiplicazione del divisore pel quoto si eseguisce realmente, si vede che

si ottengono tutti que' parziali prodotti i quali si sono sottratti dai successivi residui nel processo della divisione, e questa osservazione giova a farci meglio comprendere la sua tela, e a rilevare, che tutti quei termini nuovi che sono comparsi nei successivi parziali dividendi, sono quelli appunto che la riduzione elide nel prodotto, come evidentemente dimostra il seguente esempio.

Divisione

$$\begin{array}{lrr|l}
 & 8c^3m^3 & -a^3 & 2cm\ -a \\
\text{(A)} & -8c^3m^3+4ac^2m^2 & & \overline{4c^2m^2+2acm+a^2} \\
\hline
\text{I}^\circ\ \text{Resto} \ldots & +4ac^2m^2 & -a^3 & \\
\text{(B)} & -4ac^2m^2+2a^2cm & & \\
\hline
\text{II}^\circ\ \text{Resto} \ldots\ldots & +2a^2cm-a^3 & & \\
\text{(C)} & -2a^2cm+a^3 & & \\
\hline
 & 0 \quad 0 & &
\end{array}$$

Moltiplicazione

$$\begin{array}{llr}
 & 2cm\ \ -a & \textit{Divisore} \\
 & 4ac^2m^2+2acm\ \ +a^2 & \textit{Quoto} \\
\hline
\text{(A)} & \ldots\ 8c^3m^3-4ac^2m^2 & \\
\text{(B)} & \ldots\ldots\ +4ac^2m^2-2a^2cm & \\
\text{(C)} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ +2a^2cm-a^3 & \\
\hline
 & 8c^3m^3 \qquad\qquad -a^3 &
\end{array}$$

Simili osservazioni far si possono ancora in quest' altro esempio $(16z^4-c^4):(8z^3+4cz^2+2c^2z+c^3)$ che dà per quoto $2z-c$.

80. Se la divisione de' polinomi s' intraprendesse senza averli prima ordinati, le operazioni sarebbero assai più lunghe, perchè si otterrebbero i quoti stessi, ma espressi da un maggior numero di termini che bisognerebbe ridurre. Così dividendo per esempio il polinomio non ordinato $(2mp+m^2+p^2)$ per $m+p$, otteniamo per quoto $2p+m-p$; e dividendo il polinomio non ordinato (d^2+d^3) per $d+1$, otteniamo per quoto $d+d^2-d$ se scriviamo pel primo residuo della divisione d^3-d; ed otteniamo per quoto $d-1+d^2-d+1$, se scriviamo pel primo residuo della divisione $-d+d^3$. D' altronde poi otteniamo immediatamente senza bisogno di riduzione, per quoto $m+p$ nel 1° esempio, e d^2 nel 2°, se premettiamo l' ordinamento.

81. Come la moltiplicazione, così pure la divisione ci offre esempi che ci manifestano alcune proprietà generali dei numeri indipendenti da ogni sistema di numerazione. Trovando infatti con la esecuzione della divisione che

$$(x^2-z^2):(x-z)=x+z$$

$$(x^3-z^3):(x-z)=x^2+xz+z^2$$

$$(x^4-z^4):(x-z)=x^3+x^2z+xz^2+z^3$$

se analizziamo l'andamento dei termini, evidente risulta la legge che vi regna; sicchè in simili casi, nelle divisioni cioè della differenza di qualsivoglia eguali potenze di due numeri qualunque per la differenza delle loro radici, possiamo, senza eseguire il processo, scrivere il quoto. Così, posto $x=10$ o $z=2$ abbiamo $(10^6-2^6):(10-2)=10^5+10^4.2+10^3.2^2+10^2.2^3+10.2^4+2^5=124992$; e questo identico quoto otteniamo, dividendo (10^6-2^6) ossia 999936 per $(10-2)$ ossia per 8.

ESERCIZIO

I. $(2a^6+3a^6c+a^6m+a^6c^2+a^6cm):(a^2+a^2c)=2a^4+a^4c+a^4m$.

II. $(16c^4m^4-a^4p^8):(2cm-ap^2)=8c^3m^3+4ac^2m^2p^2+2a^2cmp^4+a^3p^6$.

III. $(5a^7-22a^6c+12a^5c^2-16a^4c^3+10a^4c^3-4a^3c^4+8a^2c^5):(5a^4-2a^3c+4a^2c^2)=a^3-4a^2c+2c^3$.

IV. $(16a^8c^4-81h^4m^8):(2a^2c-3hm^2) = 8a^6c^3+12a^4c^2hm^2+18a^2ch^2m^4+27h^3m^6$.

E gli studiosi possono poi a piacimento esercitarsi col moltiplicare due polinomii dati a capriccio, e quindi per un di essi dividere il prodotto, poichè deve risultar per quoto l'altro fattore. Così ad un tempo si esercitano nella moltiplicazione e divisione, e si avveggono, se hanno o no commesso errori nel calcolo, perchè l'una delle due operazioni serve all'altra che le è opposta, di prova.

REGRESSO DAI PRODOTTI AI LORO FATTORI

82. Se può darsi il caso, che di un dato prodotto sia noto un solo fattore, e si cerchi l'altro, il che è l'oggetto della divisione, può darsi anche il caso, che di un dato prodotto si ignorino e si cerchino ambedue i fattori. Quindi è che **Regresso dal prodotto ai fattori** *dicesi quella operazione per la quale, dato un prodotto, ne cerchiamo gli incogniti fattori*.

Questa operazione merita di essere considerata in tre casi e sono i seguenti.

I. Regresso ai fattori quando vi è un fattore monomio comune a tutti i termini del polinomio.

83. In questo caso paragonando il primo termine del polinomio col secondo, salta tosto agli occhi la quantità che in essi esiste come fattore comune; paragonando poi il fattore comune dei due primi col terzo termine, tosto rilevasi il loro fattore comune che perciò è fattor comune ai tre termini esaminati, e così di seguito operando si trova il FATTOR COMUNE GENERALE che esiste in tutti i termini. Il polinomio ci si mostra prodotto da questo fattore e da un altro fattor polinomio risultante di tanti termini, quanti son quelli del polinomio dato. E per trovare questo fattor polinomio, dopo che si è ottenuto il fattor monomio generale, è chiaro che far uso dobbiamo della divisione, perchè siamo precisamente al caso della ricerca di un solo fattore, quando è noto il prodotto e l'altro fattore. Dividendo perciò il dato prodotto pel fattor monomio comune generale, il quoto che ne risulta, esprimer deve l'altro fattore polinomio che ricercavasi. Così dato il polinomio $c^4+ac^3-c^2$, basta degnar d'un guardo i suoi termini, perchè salti agli occhi che c^2 è un fattore comune a tutti e tre; e quindi per c^2 dividendo il dato polinomio, risulterà per quoto l'altro fattore (c^2+ac-1), sicchè conchiuder possiamo che $c^4+ac^3-c^2 = c^2(c^2+ac-1)$. Troviamo col metodo stesso che

$$4a^2cr-8ac^2x = 4ac(ar-2cx)$$

e così pure

$$6a^2cy-12a^3c^3y = 6a^2cy(1-2ac^2)$$

Ora **Porre in evidenza i fattori** *dicesi il trarre fuori da più termini il fattore che è ad essi tutti comune, tornando ad indicare la moltiplicazione che prima era algebricamente eseguita*.

II. Regresso quando vi sono fattori monomii comuni solo ad alcuni e non a tutti i termini del polinomio; e raccoglimento dei fattori comuni.

84. In questo caso non vi sono regole generali per far regresso dal totale polinomio dato ai suoi fattori: che spesso anzi può non averli: ma spezzando il polinomio in due o più polinomii parziali, ciascun dei quali sia un assieme di termini aventi tutti un fattore comune, può per ciascuno di essi mettersi in pratica la regola (§.83). Così se osserviamo il polinomio (A) $6a^2m+3m-3fm+4cr-8c^2$, presto rilevasi che il fattore comune ai primi tre termini è $3m$, e agli ultimi due è $4c$, cosicchè bene potremo in sua vece scrivere (B) $3m(2a^2+1-f)+4c(r-2c$. In casi simili al presente, e sono i più frequenti, il polinomio non è un prodotto di due o più fattori, e quindi con la eseguita operazione per la quale è risultato (B), noi abbiamo decomposto non il dato totale polinomio (A) in due fattori (che esso non ha), ma ciascuno dei due polinomii parziali di cui il totale (A) risulta, giacchè $3m$ è fattore del solo parziale polinomio $6a^2m+3m-3fm$; e $4c$ solo dell'altro $(4cr-8c^2)$ e questi due riuniti costituiscono il totale (A).

85. Se però in molti casi avviene che il polinomio, il quale contiene dei fattori appartenenti soltanto ai polinomi parziali di cui esso non è che la somma, non può in due o più fattori decomporsi, in qualche altro accade che in due o più fattori (però polinomii) sia decomponibile; e ciò avviene tutte le volte che nel porre in evidenza i diversi fattori comuni parziali, i fattori polinomi che rimangono chiusi tra parentesi sieno identici. Allora i fattori comuni parziali si riuniscono anch' essi entro una parentesi, scrivendovi accanto una volta sola que' fattori polinomii identici che si trovavano moltiplicati per ciascuno di essi. E questo raggranellare insieme que' diversi fattori comuni sparsi, perchè formino un fattore polinomio d' una stessa quantità polinomia, si chiama RACCOGLIERE I FATTORI COMUNI. Ed eccone a maggiore schiarimento due esempi.

Esempio 1° $(2a^2-ac+2ag-cg)$

Nei primi due termini il fattore comune è a: ed è g nei due ultimi. Ponendoli in evidenza otteniamo

$$a(2a-c)+g(2a-c)$$

e ci accorgiamo che in questa espressione il fattore polinomio per cui è moltiplicato a è identico all' altro per cui è moltiplicato g. *Raccogliendo* perciò insieme entro una parentesi i due fattori a e g, possiamo invece della superiore espressione usare la più breve seguente

$$(a+g)\ (2a-c)$$

Esempio 2° $(ac^2-ac^2r+c^2d-c^2dr-a+ar-d+dr)$.

Quì nei primi due termini è fattor comune ac^2: nei due seguenti è fattor comune c^2d: è $-a$ negli altri due: è $-d$ nei due ultimi. Perciò ponendo in evidenza questi fattori comuni parziali, la superiore espressione diventa

$$ac^2(1-r)+c^2d(1-r)-a(1-r)-d(1-r).$$

E poichè scorgesi che tutti e quattro i fattori monomii comuni ciascuno a due termini sono tutti moltiplicati per un' identica quantità $(1-r)$, così tutti e quattro possiamo raccoglierli entro una parentesi, e scrivere in vece

$$(1-r)\ (ac^2+c^2d-a-d).$$

In seguito di ulteriori indagini ci accorgiamo che nel secondo fattore quadrinomio di quest' ultima espressione è fattore comune dei primi due termini (c^2); ed è fattor comune dei due ultimi il (-1). Ponendo perciò questi due fattori comuni in evidenza, in vece dell' ultima espressione, abbiamo

$$\left(1-r\right)\ \left(c^2(a+d)-1(a+d)\right)$$

o finalmente raccogliendo i due fattori comuni esistenti nel secondo fattor polinomio, otteniamo

$$(1-r)\ (a+d)\ (c^2-1)\ .$$

III. Regresso ai fattori quando per accadute riduzioni non sono a colpo d' occhio discernibili.

86. Quando si hanno prodotti di polinomii per polinomii, nei quali i fattori comuni spariscono in forza della riduzione, l'Algobra elementare non sa offrirci mezzi generici affine di ritrovarli. Solo il molto esercizio del calcolo giova all' oggetto, facendoci risovvenire, sebbene non saltino agli occhi, quali sieno i fattori di alcuni prodotti per es. del binomio (a^2-c^2) e del trinomio $(a^2+2ac+c^2)$. Ed in vero quantunque noi bene esaminandoli non sappiamo scorgere in essi fattori comuni, nè generali, nè parziali, pure rammentiamo (§. 60) che si risolvono il 1° binomio nei fattori $(a+c)$ ed $(a-c)$, il 2° trinomio nei fattori $(a+c)$ ed $(a+c)$.

Ricerca del massimo comun divisore di due quantità.

87. La ricerca del divisore, o fattore (che val lo stesso) e massimo di due quantità è materia spettante anch' essa al regresso dal prodotto ai fattori, giacchè trovato il fattore comune massimo di due prodotti, possiamo tosto, dividendo ciascuno di essi pel massimo fattore comune trovato, rilevare qual sia l' altro loro fattore. Il massimo comune divisore 1° di due monomii, 2° di un monomio e di un polinomio, e 3° di due polinomii ancora (quando però esso divisore comune sia monomio) non esige particolari osservazioni e rilevasi a colpo d' occhio; poichè nel 1° caso fattore comune massimo è lo stesso fattore comune ai due termini: nel 2° è il fattor comune sì al monomio che al fattore generale dei termini del polinomio, nel 3° è il fattor comune al fattor generale dell' uno e al fattor generale dell' altro polinomio.

Così I. I monomii $32a^4c^3dm$ e $56a^4c^2gm$ hanno per massimo comun divisore $8a^4c^2gm$,

mentre $32a^4c^3dm = 4cd \times 8a^4c^2m$; e $56a^4c^2gm = 7g \times 8a^4c^2m$.

Così II. Il monomio $3ac^3m$, e il polinomio $(6ac^3m + 12ac^2p - 3ac^2)$ hanno per massimo divisore loro comune $3ac^2$, mentre $3ac^3m = cm \times 3ac^2$ o $(6ac^3m + 12ac^2p - 3ac^2) = (2cm + 4p - 1)3ac^2$.

Così III. Il binomio $(3a^2m + 6a^2c)$ ed il trinomio $(9ap^2 - 3ap + 3a^2p)$ hanno per fattore comune massimo $3a$; poichè $(3a^2m + 6a^2c) = (m + 2c)3a^2$; e $(9ap^2 - 3ap + 3a^2p) = (3p - 1 + a)3ap$; e perciò $3a^2$ è fattore comune del 1° polinomio, $3ap$ lo è del 2°; e il $3a^2$ e il $3ap$ non hanno per fattore comune che il semplice $3a$.

88. Il massimo divisore comune però di due polinomii, quando sia un polinomio pur esso, non è facile a rinvenirsi a colpo d'occhio, e v'è bisogno di porre in pratica le regole stesse che l'Aritmetica suggerisce pei numeri. Fa d'uopo perciò rammentare che un qualunque dividendo D è uguale al divisore d moltiplicato pel quoto q più il resto r, che cioè I. $D = dq + r$ quindi per la stessa ragione dividendo il divisore pel rosiduo, dovrà aversi . . . . II. $d = rq' + r'$ e dividendo il 1° pel 2° residuo . . . . III. $r = r'q'' + r''$ e dopo un certo numero di divisioni . . . . finalmente si avrà . . . IV. $r' = r''q''' + 0$. E che si debba giungere in queste divisioni successive finalmente al residuo r'' che sia contenuto esattamente in r' sicchè si abbia zero di resto, si è in Aritmetica dimostrato. Ivi si è puro dimostrato che il comune massimo divisore di due numeri D e d dee dividere esattamente anche il resto r della loro divisione. Dunque il comune massimo divisore di D e d divide anche d ed r. E se divide d ed r dunque in forza dello stesso teorema dee dividere anche r' resto della divisione di d per r: e se divide r ed r', dunque anche r'' resto della divisione di r per r'. Ma r'' divide esattamente r', siccome rilevasi dalla formola IV: dunque anche $r'q''$; poichè chi divide un numero, divide anche ogni suo multiplo; e poichè non v'ha dubbio che non divida anche sè stesso, è chiaro che r'' divide ciascuna delle due parti che formano la somma $r'q'' + r'' = r$ e quindi la loro somma r, poichè chi divide ciascuna parte, divide il loro insieme pur anche. Per le medesime ragioni se r'' divide r' ed r, divide anche $rq + r' = d$. E se r'' divide r e d, divide ancora $dq + r = D$. Dunque quel resto r'' che divide senza residuo il resto r' che lo precede è I. il *divisore comune* delle due date quantità D e d. È II. il *divisore massimo*; poichè se il divisore massimo dee dividere (come si è dimostrato) anche l'ultimo resto r'', non può di r'' essere maggiore.

89. Spesso occorre poi nella esecuzione della divisione di un polinomio D per l'altro d, e poi di d pel residuo r', ec. spesso occorre di preparare i polinomii in guisa che possa il primo termine dell'uno per l'altro dividersi senza frazioni. E per tale oggetto giova il rimarcare che il comun divisore di due quantità non viene alterato, se una sola di esse venga moltiplicata o divisa per una quantità, la quale non abbia fattore alcuno comune coll'altro polinomio. Infatti chiamisi A il fattore o divisore comune polinomio dei due polinomii che per brevità esprimiamo l'uno per ABC, e l'altro per AD. È ben chiaro che se moltiplichiamo per M un solo di essi, e per esempio ABC, od otteniamo ABCM, avremo alterato certamente il suo valore, perchè è divenuto M volte più grande: ma siccome M è fattore che non esiste nell'altro polinomio AD, il divisore comune di questo polinomio AD e del nuovo polinomio ABCM ottenuto per moltiplicazione di ABC per M, è lo stesso A fattore comune di AD o di ABC.

In egual modo è chiaro che se dividiamo per B un solo dei due polinomii, e per es. ABC, ed otteniamo AC, avremo alterato il suo valore, perchè lo abbiamo reso B volte più piccolo: ma siccome C è fattore che non esiste nell'altro polinomio AD, il divisore comune di AD e del nuovo polinomio AC ottenuto per divisione di ABC per C è lo stesso A divisor comune di AD e di ABC.

90. Diamo l'applicazione di queste regole ad un esempio. Si cerchi il divisore comune del trinomio $m^2 + 2mr + mr^2$ e del binomio $m^2 - r^2$. Ecco il prospetto dell'operazione.

	Dividendo	Divisore
	$m^2 + 2mr + r^2$	$m^2 - r^2$
	$-m^2 \quad + r^2$	1. Quoto
Resto 1°	$+2mr + 2r^2$	

L'ottenuto resto $2mr + 2r^2$ si può ben di-

videre per $2r$, perchè $2r$ non è fattore che esista nell' altro polinomio m^2-r^2, e si ottiene $m+r$. Ora questo residuo semplicizzato passa ad essere divisore, mentre il divisore m^2-r^2 passa ad essere dividendo; ed abbiamo

Divisore che passa ad essere dividendo	Residuo semplice che passa ad essere divisore
$m^2- \ r^2$	$m+r$
$-m^2-mr$	$m-r$ Quoto
$-mr-r^2$	
$+mr+r^2$	
$0 \quad 0$	

E quì ha fine l' operazione poichè il divisore $m+r$ dà zero di resto; e perciò è desso il massimo comun divisore.

Dividendo infatti pel trovato divisor comune $(m+r)$ il trinomio $m^2+2mr+r^2$, otteniamo $(m+r)$; e dividendo per lo stesso divisor comune $m+r$ il binomio m^2-r^2, otteniamo $m-r$, cosicchè abbiamo

$$m^2+2mr+r^2 = (m+r)\ (m+r)$$

$$m^2-r^2 = (m+r)\ (m-r)$$

In molti casi si ottiene più facilmente il massimo comun divisore di due polinomii decomponendoli nei loro fattori e nulla più: in molti altri premettendo questa decomposizione alle successive divisioni.

SEZIONE III.

Frazioni Algebriche.

91. Tutta la teorica delle frazioni, quale fu data in Aritmetica, ivi applicandola ai casi particolari, viene ora estesa a' casi generici; e perciò riportandoci, senza ripeterli, a tutti i ragionamenti ivi fatti, passiamo a semplicemente esprimere in linguaggio algebrico i loro risultati.

Scrittura, denominazioni e distinzioni delle frazioni.

92. Le frazioni algebriche si scrivono nel modo stesso che le aritmetiche. Così $^c/_n$ è una frazione, e significa che la unità è divisa in n parti, delle quali se ne prendono c. Non si usa però in Algebra di dare al numero indicante il denominatore la desinenza in *esimo* come in Aritmetica, non si usa cioè dire *c ennesimi*; ma enunciando le frazioni unicamente sotto l'aspetto di divisioni, giacchè quoti di divisione e frazioni equivalgono, $^c/_n$ si enuncia *c diviso per n*, ed anche *c diviso n*. E a tenore dell' enunciato, le frazioni algebriche, piuttostochè per *parti di unità*, sogliono riguardarsi come *divisioni ineseguibili per non essere il divisore un fattore del dividendo*.

93. Posto poi che a, c, n esprimano numeri interi, è poi chiaro che $^a/_{ac}$ è *frazione vera*: che $^a/_a$, $^{ac}/_c$, $^{6ac}/_{3a}$ sono *frazioni spurie apparenti*: che $^{ac+m}/_c = {^{ac}/_c} + {^m/_c} = a+{^m/_c}$ è una frazione *spuria mista*.

Proprietà delle frazioni.

94. Dalla nozione delle frazioni risulta

I. Che $^{a+m}/_c > {^a/_c}$ e $^a/_{c+m} < {^a/_c}$.

II. Che $^a/_c$ si rende m volte più grande scrivendo $^{am}/_c$; ed m volte più piccola, scrivendo $^a/_{cm}$; e la $^{gr}/_{cm}$ si rende m volte più grande, scrivendo $^{gr}/_c$; e si rende r volte più piccola scrivendo $^g/_{cm}$.

III. Che $^a/_c = {^{am}/_{cm}}$; e quindi per esercizio moltiplicando ambo i termini delle seguenti frazioni, cioè della 1ª per $3ad$, della 2ª per $-2am$, della 3ª per ac, della 4ª per a^2+m^2, si ottengono

$$1^a \ldots \frac{d^3+2am}{4dm^2} = \frac{3ad^4+6a^2dm}{12ad^2m^2}$$

$$2^a \ldots \frac{-a^2m}{2c^2-3m^2} = \frac{2a^3m^2}{-4ac^2m+6am^3}$$

$$3^a \ldots \frac{a^2+ac}{a^2-c^2} = \frac{a^3c+a^2c^2}{a^2c-ac^3}$$

$$4^a \ldots \frac{a^2-m^2}{a^2+m^2} = \frac{a^4-m^4}{a^4+2a^2m^2+m^4}$$

IV. Che $^{cn}/_{an} = {^c/_a}$, e quindi per esercizio dividendo ambo i termini delle seguenti frazioni, cioè della 1ª per $5m^2pr$, della 2ª per p, della 3ª per $p+d$, della 4ª per m^2-2c, si ha

$$\frac{15m^2p^3qr}{25m^4prs} = \frac{3p^2q}{5m^2s}$$

$$\frac{p^2-3ap-p}{mp} = \frac{p-3a-1}{m}$$

$$\frac{p^2+dp}{p^2-d^2} = \frac{p}{p-d}$$

$$\frac{m^4-4c^2}{cm^2-2c^2} = \frac{m^2+2c}{c}$$

Riduzioni delle frazioni.

95. *Riduzione delle frazioni a interi*. Eseguendo la divisione riduciamo a interi le frazioni *apparenti* A, B; e ad interi uniti a frazioni vere, le *miste* C, D, quì sotto espresse.

A.................. $\dfrac{8a^2c^3q}{4ac^2} = 2acq$

B....... $\dfrac{15a^2c^2-5c^2}{5c^2} = 3a^2-1$

C.... $\dfrac{3ac+ac^2m+c^2h}{ac} = 3+cm+\dfrac{ch}{a}$

D.... $\dfrac{2a^2q-6c^2q+f}{a^2-3c^2} = 2q+\dfrac{f}{a^2-3c^2}$

96. *Riduzione d' interi a frazioni.* Se vogliasi l' intero a ridotto a frazione avente per denominatore la quantità c, ovvero la quantità $c+m$, conviene moltiplicare l' intero pel voluto denominatore, e avremo $a = {}^{ac}/_{c}$ ovvero $a = {}^{ac+am}/_{c+m}$. Volendo dare il denominatore $x-y$ alla quantità $x+y$, colla stessa regola otteniamo

$$x+y = \frac{x^2-y^2}{x-y}.$$

97. *Riduzione delle frazioni ai menomi termini*. Dividendo ambo i termini delle proposte frazioni pel massimo loro comune divisore, si ottiene l' intento. Or questo divisore cercando per esercizio in ciascuna delle sei seguenti frazioni, troviamo che è $8a^4c^2d$ per la 1ª; $4h^2m^3p$ per la 2ª; cm per la 3ª; $3ac^2$ per la 4ª; $2c+3$ per la 5ª; a^2-ac per la 6ª. Trovati i divisori comuni, eseguendo per essi le debite divisioni, otteniamo

1ª............ $\dfrac{32a^4c^3d}{56a^4c^2dm} = \dfrac{4c}{7m}$

2ª............ $\dfrac{4h^2m^3p}{8h^2m^4p^2} = \dfrac{1}{2mp}$

3ª...... $\dfrac{2cm^2+c^2m-cm}{cm^2} = \dfrac{2m+c-1}{m}$

4ª........... $\dfrac{3ac^2}{6a^2c^2+3ac^2} = \dfrac{1}{2a+1}$

5ª. .... $\dfrac{2c^2+3c}{2ac+3a} = \dfrac{c}{a}$

6ª... $\dfrac{8a^3-8a^2c}{5a^3-10a^2c+5ac^2} = \dfrac{8a}{5a-5c}$

98. *Riduzione delle frazioni ad un comune denominatore.* Col metodo generale le frazioni ${}^{m}/_{n}$, ${}^{a}/_{c}$ si convertono in ${}^{cm}/_{cn}$, ${}^{an}/_{cn}$; e così le seguenti frazioni

$$\frac{a^2-c^2}{a+c}\;,\quad \frac{a-c}{c}\;,\quad \frac{a+c}{a}$$

divengono

$$\frac{a^3c-ac^3}{a^2c+ac^2}\;,\quad \frac{a^3-ac^2}{a^2c+ac^2}\;,\quad \frac{a^2c+2ac^2+c^3}{a^2c+ac^2}$$

Quando poi vi sono nei denominatori dei fattori comuni, le frazioni si riducono al più piccolo comune loro denominatore formando questo col riunire tutti i fattori differenti (e alla più alta potenza elevati) che si trovino nei loro denominatori, e poi ponendo a fattori nel numeratore di ciascuna frazione tutti que' fattori del denominatore comune che non si trovano nel rispettivo denominatore, affinchè in ogni frazione tanto il numeratore che il denominatore sien moltiplicati per una stessa quantità.

Così, riducendole al comune più piccolo loro denominatore $2c^2m^2$, le seguenti frazioni,

$$\frac{2a}{c^2m}\;,\quad \frac{r}{2c^2m}\;,\quad \frac{4n}{m^2}$$

trasformansi in

$$\frac{4am}{2c^2m^2}\;,\quad \frac{mr}{2c^2m^2}\;,\quad \frac{8c^2n}{2c^2m^2}$$

Addizione e sottrazione delle frazioni.

99. Per le regole dell' addizione si ha

$$\frac{a}{c}+\frac{3m+2a}{c}+\frac{3a}{c} = \frac{6a+3m}{c}$$

$$\frac{a}{c}+\frac{2m}{n}+\frac{c^2}{n^2}=\frac{an^2+2cmn+c^3}{cn^2}$$

$$m-c+\frac{c^2}{m+c}=\frac{m^2}{m+c}$$

110. Per le regole di sottrazione si ha

$$\frac{2a^2}{3c}-\frac{a^2+c-a}{2c}=\frac{a^2-3c+3a}{6c}$$

$$(a-r)-\frac{r^2}{a+r}=\frac{a^2-2r^2}{a+r}$$

$$\frac{r^2}{r-c}-r=\frac{cr}{r-c}$$

$$3g^2+\frac{16n^2}{3g^2+4n}-4n=\frac{9g^4}{3g^2+4n}$$

$$\frac{p+q}{p-q}-\frac{p-q}{p+q}=\frac{4pq}{p^2-q^2}$$

Moltiplicazione e divisione.

101. Per le regole della moltiplicazione abbiamo $a/_n \times r = ar/_n$; ed $a/_{cm}\times c = a/_m$.

Così $a/_c \times m/_n = am/_{cn}$.

Così pure $x(1+1/_3+1/_5)=x+x/_3+x/_5$; e quindi se occorra (come spesso accade nella risoluzione delle equazioni) fare l'inverso, cioè porre in evidenza quel fattore comune x, pel quale ora abbiamo moltiplicato il trinomio, è ben chiaro che si avrà $x+x/_3+x/_5 = x(1+1/_3+1/_5)$.

Così pure $y(a/_c-1)=ay/_c-y$; e viceversa $ay/_c-y=y(a/_c-1$.

Così $(a+c/_m)(m/_n-1)=am/_n+c/_n-a-c/_m=\frac{am^2+cm-amn-cn}{mn}$.

Così in fine $\left(\frac{a}{z}+\frac{c}{m}\right)\left(\frac{z^2}{a^2}+\frac{m^2}{c^2}\right)$

$$=\frac{z}{a}+\frac{cz^2}{a^2m}+\frac{am^2}{c^2z}+\frac{m}{c}.$$

102. Per le regole della divisione si ha

$$a/_c : r = a/_{cr};\quad mr/_p : r = m/_p$$
$$a : r/_y = ay/_r;\quad a/_m : r/_n = an/_{mr}$$

E invece del segno : facendo uso della linea orizzontale per indicare la divisione, abbiamo pure

$$\frac{a}{2-2/_3-3/_5}=\frac{a}{11/_{15}}=\frac{15a}{11}$$

E adottando inoltre la convenzione, che quando in una espressione algebrica vi hanno più linee orizzontali, quella separa il dividendo dal divisore, che si trova a livello del segno di eguaglianza (perlochè è evitato ogni equivoco; e per esempio conosciamo che nel 2° membro delle sottoposte eguaglianze trattasi della divisione dell'intero m per una frazione, e non già della divisione di una frazione pell'intero 6) notiamo che

$$\frac{m}{n/_2+c/_3}=\frac{m}{\frac{3n+2c}{6}}=\frac{6m}{3n+2c}$$

Così pure $(m/_n+c/_r) : (a/_c-a/_r) = (mr+cn)/_{nr} : (ar-ac)/_{cr} = c(mr+cn)/_{an(r-c)}$.

103. Rammentando poi (§.85) che $x^3-z^3=(x^2+xz+z^2)(x-z)$ facilmente otterremo

$$\frac{2xz-z^2}{x^3-z^3}:\frac{2x-z}{(x-z)^2}=\frac{(2xz-z^2)(x-z)^2}{(x^3-z^3)(2x-z)}$$

$$=\frac{z(x-z)^2}{(x^2+xz+z^2)(x-z)}=\frac{xz-z^2}{x^2+xz+z^2}$$

104. Finalmente nel seguente esempio accogliendo quasi tutte le operazioni che risguardano le frazioni, mandando ad effetto quanto nel sinistro membro è indicato, otteniamo

$$\frac{\frac{(a+c)(a+c)(a+c)}{a^2}-a-c}{\frac{c^2}{a}}-\frac{c}{a}=1$$

SEZIONE IV.

Teorìa de' problemi ed equazioni di primo grado.

NOZIONI PRELIMINARI GENERICHE INTORNO AI PROBLEMI ED EQUAZIONI

105. **Problemi o quesìti**, la cui soluzione è lo scopo principale dell'Algebra, *sono quelle proposizioni, in cui si progetta di scuoprire qualche quantità incognita in grazia di qualche quantità nota.* Chiaro è dunque che nelle domande suscettibili di soluzione nè tutto debbe essere noto, altrimenti mancherebbe l'oggetto della ricerca, nè tutto debbe essere ignoto, altrimenti ogni ricerca sarebbe vana: vi debbono perciò essere enunciato e *quantità note* (che si chiamano i *dati* del problema, e s'indicano algebricamente colle non ultime lettere) e *quantità incognite* che per lo più si marcano colle ultime dell'alfabeto: e le *note relazioni* che passano tra le quantità note ed incognite, che chiamansi le *condizioni* del problema, sono que' mezzi che col sussidio del calcolo ci recano con sicurezza al ritrovamento di ciò che si ricerca, e contraddistinguono i *Problemi dagli Enigmi*. Le regole algebriche poi, con che si ottiene la soluzione dei quesiti, sono tutte basate sovra un rapporto d'eguaglianza tra quantità note od ignote che le condizioni de' problemi, anche i più intricati e difficili, offrono all'occhio esercitato dell'Algebrista; e quando questo rapporto si è tradotto nel laconico linguaggio algebrico, convertendo le parole in lettere e segni analoghi, allora *membri* si chiamano le due quantità eguali, e precisamente *primo membro* la collezione di tutti i termini che precede il segno =, e *secondo membro* la collezione di tutti quelli che il seguono.

106. Tra i quesiti che ci vengono offerti, vedemmo esserne dei sì facili che non appena si sono tradotti in linguaggio letterale, ci offrono tosto un'eguaglianza fra l'incognita che si cerca, non avviluppata da altra quantità, o un assieme di quantità tutte note tra loro legate con segni indicanti o addizione o sottrazione o moltiplicazione o divisione. E siccome questi problemi, per quanto abbiano complicato il 2° membro d'eguaglianza, pur non esigono per la loro soluzione alcun *calcolo algebrico*, ma la pura esecuzione delle operazioni aritmetiche, *aritmetici* si sono chiamati. Così se cerchisi « quanto sborsar debba ciascuno di 12 soci che hanno bevuto 3 bottiglie di malaga a paoli sei, e 2 bottiglie di cipro a paoli tre la bottiglia » chiamando x il numero dei paoli richiesto, è chiaro che $x = {}^{3 \cdot 6}/_{12} + {}^{2 \cdot 3}/_{12} = 2$. Ma se in problemi di tal natura sforzo alcuno d'ingegno non occorre per giungere al valore della cosa cercata, problemi vi sono di tutt'altra tempra, che tradotti in linguaggio algebrico, ci offrono anch'essi un rapporto d'eguaglianza, ma non già come ne' quesiti aritmetici, fra l'incognita isolata ed altre quantità tutte note, ma fra quantità nelle quali trovasi l'incognita sì avviluppata, che si esige una serie di ragionamenti, o quindi il soccorso del calcolo per giungere ad *isolarla*, ed ottenerla eguale ad un assieme di quantità tutte note. E poichè questi problemi, dopo essere stati tradotti in letterale linguaggio, hanno duopo del calcolo algebrico, affine si giunga a conoscere quali operazioni far convenga sulle quantità note, per ottenere il valore dell'incognita, si chiamano perciò *algebrici*, e questi son l'oggetto delle attuali nostre ricerche.

107. Se per es. si chiegga « Di quanti soldati era forte un'armata, di cui $^1/_4$ è rimasto sul campo di battaglia, $^2/_5$ si son fatti prigionieri, e 1400 son fuggiti » sebbene nell'enunciato non sia esplicitamente espresso rapporto alcuno di eguaglianza, pure l'analitico esame delle sue condizioni, ci mostra che l'intera armata era eguale al numero de' guerrieri morti, più quello dei vivi costituito dai prigionieri, e dai fuggitivi; cosicchè chiamando x il numero esprimente l'intera armata, per soddisfare alle condizioni del problema, tal debbe essere x da dar luogo alla seguente eguaglianza (A)... $x = {}^x/_4 + {}^{2x}/_5 + 1400$.

Or questa espressione ci dà, non già un'eguaglianza *dimostrata*, poichè tal sarebbe se x fosse nota, ma solo un'eguaglianza *convenuta*, un'eguaglianza cioè che non veggiamo, ma che sappiamo doversi verificare, affinchè sieno soddisfatte le condizioni del problema. E tanto per ottener l'intento ci basta; poichè passando ad o-

perare sui termini della convenuta ugoaglianza e quindi anche sulla quantità incognita come se nota fosse, ecco come giuogiamo a scuoprirla. Se per soddisfare alle condizioni del problema debbe essere $x = x/_4 + 2x/_5 + 1400$, togliendo da ambedue i membri dell' eguaglianza la stessa quantità $x/_4 + 2x/_5$, il che si eseguisce col toglierla effettivamente dal membro destro, e collo scriverla in istato di sottrazione nel sinistro, dovranno i due membri egualmente falcidiati rimaner eguali, dovrà cioè pur essere $x - x/_4 - 2x/_5 = 1400$, ovvero (§.101) $x(1 - 1/_4 - 2/_5) = 1400$, e se per soddisfare alle condizioni del problema debbe essere $x(1 - 1/_4 - 2/_5) = 1400$, dividendo ambo i membri eguali per la stessa quantità $(1 - 1/_4 - 2/_5)$, ad oggetto di sbarazzare il più che possiamo la x dalle quantità colle quali trovasi vincolata, dovrà pur essere

$$(B)\ldots x = \frac{1400}{1 - 1/_4 - 2/_5} = \frac{1400}{7/_{20}}$$
$$= 28000/_7 = 4000.$$

Dunque l' armata x era di 4000 soldati. Quindi se la x essere debbe 4000 per soddisfare alle condizioni del problema, ossia perchè si abbia $x = x/_4 + 2x/_5 + 1400$, quest' espressione, che era un' *eguaglianza per convenzione*, diverrà un' *eguaglianza reale*, se sostituiremo 4000 ad x ovunque essa x si trovi, ed avremo

$$(C)\ldots 4000 = 4000/_4 + 2\cdot4000/_5 + 1400$$

e di questa eguaglianza la verità viene confermata dalla esecuzione delle operazioni indicate, le quali ci recano alla seguente identità

$$(D)\ldots 4000 = 4000$$

la quale ci assicura che non è corso errore alcuno nel calcolo, mostrandoci che il trovato valore di x soddisfa realmente alle condizioni del problema.

108. Or se noi teniam dietro a quanto si è praticato per giungere alla soluzione dell' ora esposto quesito, stabilir possiamo le seguenti regole generali.

Quando ci si offre un problema a risolvere, convien prima d' ogni altro scuoprire un qualche rapporto di eguaglianza fra i dati e le incognite, e quindi tradurre le parole da cui viene indicato e in lettere e cifre esprimenti le quantità che nel problema sono annunciate, e in segni esprimenti le loro relazioni.

E dicesi **Equazione** *la espressione algebrica della convenuta eguaglianza tra alcune quantità note ed ignote connesse tra loro a tenore delle condizioni dei problemi.*

Tale è stata la (A) al (§.107). E notiamo a tale proposito che se anche senza pensare a problemi, noi supponiamo on rapporto d' eguaglianza fra quantità note ed ignote, se scriviamo per es. a capriccio $3x - 20 = 3x/_4 + 7$ anche questa eguaglianza, purchè sia tale, che non includa contraddizione nei termini, è un' equazione a tenore della nostra definizione, poichè quantunque non sia derivata da un problema, pure a un problema può riferirsi, alla cui enunciazione giunger possiamo colla inversa traduzione delle lettere, cifre e segni in parole, dicendo che dessa è l' equazione di un problema in cui « cercasi un numero tale, di cui il triplo diminuito di venti è uguale a tre quarti di sè, più sette » cosicchè conchiudiamo, che come l' enunciato di ogni problema, modificato se occorra per rendere esplicita la condizione di eguaglianza, si converte in equazione; così ogni vera equazione rappresenta un problema, è cioè l' enunciato d' un problema tradotto in algebrico linguaggio (a).

109. Tradotto il problema in linguaggio algebrico, ossia in *equazione*, poichè le nostre mire son dirette a trovare il valore dell' incognita, noi giungiamo all' intento, assoggettando i membri dell' equazione a tali operazioni che alterandone il valore,

---

(a) In queste espressioni poi talvolta l' Algebrista rinuncia alla convenzione stabilita di esprimere le quantità incognite con le ultime lettere dell' alfabeto e specialmente in tutti que' casi nei quali per esaurire una teoria fa d' uopo che una alla volta consideri per incognite tutte le diverse quantità che sono espresse in una equazione. In questi casi sarebbe una puerilità, il sostituire la lettera x ora all' a per esempio, ora alla n ora alla s secondo che o l' a o la n o la s venga presa per incognita, giacchè basta ben avvertire quale nel particolare caso attuale prendiamo per incognita, e quali prendiamo per note fra le quantità espresse dalle diverse lettere, che si trovano tra loro vincolate sotto certi rapporti (nella indicazione dei quali l' equazione appunto consiste) per giungere all' isolamento di quella che in attualità si è presa di mira e trovarne il valore.

senza distruggerne l' eguaglianza, ci offrano nuove equazioni in cui l' incognita o lo incognite si trovino sempre meno avviluppate da altre quantità, finchè finalmente ad una eguaglianza si giunga, in un membro della quale sia una sola incognita scevra di ogni impaccio di segni, di esponenti e coefficienti espressi, e perciò affetta dal $+$, e col coefficiente ed esponente $= 1$, e quantità tutte note sieno nell' altro membro.

Ed **Equazione finale** *chiamasi quella eguaglianza, in cui l' incognita positiva senza espresso coefficiente ed esponente sta sola in un membro; e quantità tutte note stanno nell' altro.*

Dicesi poi a ragione *finale*, poichè è l' ultima uguaglianza che ci determina il valore dell' incognita. Cessa infatti di esser tale dal momento che trovasi uguale ad un assieme di quantità tutte note, siccome osserviamo in (B) al (§. 107).

Tutta la serie dei ragionamenti ed operazioni per la cui trafila è d'uopo passare ad oggetto di giungere dalla equazione in cui si è tradotto l' enunciato del problema alla finale, può dirsi costituire la differenza che passa fra i problemi algebrici e gli aritmetici. Questi infatti tradotti che sono in linguaggio letterale, ci offrono l' incognita sola in un membro, mentre esistono nell' altro quantità tutte note, sicchè può dirsi che la stessa traduzione algebrica dei problemi aritmetici è un' equazione finale, a cui non pervengono i problemi algebrici che in grazia dell' analisi; ma giunti a questo punto, essi si trovano alla condizione stessa de' problemi aritmetici, mentre sì per gli uni che per gli altri non resta che la sola *parte pratica*, cioè la esecuzione delle aritmetiche operazioni nel secondo membro indicate.

110. In seguito, ottenuto il valor della incognita, notiamo che un criterio per esplorare se niun errore siasi commesso nel calcolo, è l' osservare se il valor trovato soddisfi alle condizioni del problema; e per tale oggetto questo valore si sostituisce alla x ovunque trovisi nell' equazione in cui è stato tradotto, e così se non vi è sbaglio nell' operato, la eguaglianza convenuta si converte in una eguaglianza evidente perchè fra quantità tutte note.

Ed **Equivalenza** *si chiama la eguaglianza di quantità tutte note aventi sotto un diverso aspetto il medesimo valore.* Tale è l' espressione (C) al (§. 107).

111. Finalmente eseguendo le operazioni indicate dai segni esistenti in ambi i membri della equivalenza, essi divengono identici, e quindi

Dicesi **Identità** *una uguaglianza di quantità, le quali non solo convengono nel valore, ma nell' aspetto pur anche.*

Tale è l' espressione (D) al (§. 107).

112. Non essendovi difficoltà alcuna nella parte *pratica* de' problemi, cioè nella esecuzione delle operazioni aritmetiche che si trovano necessarie al conseguimento del valore dell' incognita, noi riguardiamo come sciolti i problemi, quando siamo giunti a conoscere quali sieno le operazioni che debbono sulle quantità date eseguirsi, ossia quando si è soddisfatto alla loro *parte teorica*, che abbraccia le due seguenti operazioni.

I. La **Traduzione dell' enunciato in equazione** *che è la espressione in note algebriche del rapporto d' uguaglianza offertoci dalle condizioni del problema.*

II. La **Risoluzione dell' equazione** *ossia l' isolamento delle incognite che è il metodo e l' insieme delle operazioni che si praticano per giungere dall' equazione data dal problema alla finale, ad oggetto di isolare le incognite dalle altre quantità note con cui trovansi avviluppate.*

113. Ad oggetto di aver poi una norma per conoscere con quali metodi si possono risolvere tante e sì diverse equazioni, in che si traducono infiniti problemi di varia indole e forma, gli Algebristi hanno riconosciuto utile il dare ad essi una classificazione. Si sono infatti distinti i problemi e le equazioni per rapporto al *numero delle incognite*, che sono nell' equazione introdotte. Si sono chiamati *ad una incognita*, se nella loro espressione algebrica è impiegata un' incognita sola, o perchè realmente una cosa sola si cerchi, o perchè se più se ne cerchino, sono sì evidenti i rapporti che hanno ad una incognita tutte le altre, che colla massima facilità possono esprimersi e per mezzo di essa determinarsi. Si sono chiamati problemi a due incognite quelli nella cui algebrica espressione sono realmente contrassegnate due incognite ecc. Si sono distinti i problemi, e le equazioni anche in

gradi, che si son fatti dipendere dagli esponenti delle incognite. Si son detti di 1° *grado*, quando non solo nell'equazione in cui si è tradotto il problema, ma in tutte quelle ancora che ne derivano prima di giungere alla finale, non vi sia termine che contenga più d'un fattore incognito; e si sono dette di 2° di 3°, di 4° *grado*, se il 2, il 3, il 4, esprima il numero dei fattori incogniti o eguali o diversi che si trovano nel termine, che ne ha più di tutti. Quì però non trattiamo che delle equazioni di 1° grado ad una e a più incognite; e dando principio dalle equazioni ad una incognita sola, parliamo I. della *traduzione dei problemi in equazione* e II. *della loro risoluzione*.

Traduzione dei problemi in equazione

114. Rapporto al tradurre in equazione i problemi e non solo di primo, ma di qualunque sia grado, è a notarsi che in alcuni di essi dalla loro enunciazione medesima è manifestamente espresso il rapporto d'eguaglianza che deve tradursi in equazione, e allor dicesi *esplicito*: in alcuni altri questo rapporto *è implicito*, non vien cioè presentato direttamente dalle condizioni del quesito, ma fa d'uopo che il calcolatore il tragga fuori per così esprimermi dalle loro viscere, o il formi coi materiali che le condizioni stesse gli somministrano.

Per riuscire poi in ambedue i casi a tradurre facilmente in equazione i problemi, giova esercitarsi nel formare delle equazioni a capriccio, e quindi considerandole come provenienti da un problema, trovarne l'enunciato col tradurle nel comune idioma; e giova poi far l'inverso, tradurre cioè in caratteri algebrici l'enunciazione dei problemi, cominciando dai più facili, perchè col molto far pratica nel passare dal linguaggio algebrico all'ordinario, e viceversa, giungiamo ad addomesticarci colla scrittura del calcolo, e ci formiamo quell'occhio e criterio algebrico che in tali casi è necessario. Acquistata quest'abitudine, quando ci vien presentato un quesito anche assai complicato, dopo di averlo letto attentamente, fa d'uopo distinguere le quantità note dalle incognite, notando le prime o con numeri, o lettere, e sempre con lettere le seconde; e poscia tornando a legger di nuovo, giova tradurre in scrittura algebrica, di mano in mano che si notano, le successive condizioni; e quindi in modo ordinarle da dar luogo ad una eguaglianza. Quando ciò siasi fedelmente eseguito, il problema è tradotto in equazione; e allora poi certi saremo di non aver trascurata alcuna delle condizioni del quesito, quando ci saremo assicurati di avere per mezzo delle medesime algebricamente indicato che la x debba subire tutte quelle operazioni che si faranno sul numero richiesto, quando dopo averlo trovato, passeremo a verificare se al quesito soddisfi.

115. Così operando, se trattisi di problemi in cui il rapporto d'eguaglianza è *esplicito*, senza artificio alcuno troviamo convertito l'enunciato in equazione, come nel seguente esempio possiamo verificare. « Claudia interrogata in pubblico sulla età sua, e de' suoi tre figli, dopo averci annunciato che il figlio maggiore ha 20 anni, il secondo ne ha 6, il terzo ne ha 4, soggiunge che la sua età, più il quadrato dell'età del figlio maggiore moltiplicato per l'età del secondo, e diviso pel quadrato dell'età del più piccolo, è uguale al quadrato dell'età del maggiore diviso per l'età del più piccolo, più la di lei stessa età moltiplicata pel quadrato dell'età del medio, e divisa pel quadrato della età del minore. » Stabilite infatti le seguenti denominazioni,

Età della madre . . . . . $= x$
Età del figlio maggiore *anni* 20 $= c$
Età del figlio medio . . 6 $= r$
Età del figlio minore . . . 4 $= a$

tosto il problema traducesi nella seguente equazione

$$x + \frac{c^2 r}{a^2} = \frac{c^2}{a} + \frac{r^2 x}{a^2}$$

Se poi trattisi di problemi in cui il rapporto di eguaglianza è implicito, come per es. nel quesito poco fa esposto « *Di quanti uomini risultava un' armata, della quale* $^1/_4$ *è rimasto sul campo*, $^2/_3$ *sono fatti prigionieri*, *e* 1400 *sono fuggiti* » in tal caso affine di riuscire nell'intento, conviene adoperarsi prima di ogni altro a trarre dalle condizioni il rapporto di eguaglianza che non è espresso; ed in questo esempio è ben facile l'accorgersi che il numero dei soldati che costituivano l'armata *è uguale*

al numero totale dei morti, dei prigionieri e dei fuggiti. Vi sono però dei casi nei quali fa d'uopo ancora ricorrere ad artifici per estricar fuori dalle condizioni il rapporto d'eguaglianza, artifici che variano col variare delle condizioni stesse, sicchè non dipendono da regole generali, ma solo da una certa penetrazione di spirito, al cui sviluppo e incremento contribuiscono e il lungo esercizio, e la varietà degli esempi.

Risoluzione generale delle equazioni di primo grado ad un'incognita

116. Quando l'enunciato del problema è tradotto in equazione, convien passare alla sua risoluzione; e le regole generali per di cui mezzo, data un'equazione anche la più intricata, si giunge alla finale, in cui la x sia sola in un membro, e nell'altro vi sieno quantità tutte note, sono appoggiate ai due assiomi seguenti: I° Assioma. *I due membri di un'equazione restano eguali, se ad entrambi si aggiungano o si tolgano quantità eguali*. II° Assioma. *I due membri di una equazione restano eguali se ambedue si moltiplichino o si dividano per una medesima quantità*.

Conseguenze del I° assioma.

117. Data l'equazione $x+c=m$, se c'interessi togliere $+c$ dal 1° membro in modo che prosegua ad essere uguale al 2°, conviene che togliamo $+c$ anche dal 2°. Facendo perciò la effettiva sottrazione di $+c$ dal 1° membro, ed indicandola nel 2°, abbiamo $x=m-c$. *Si trasporta dunque un termine che sia affetto dal + da un membro all'altro senza alterare la verità della eguaglianza, cambiandogli il segno.*

Data la $x-c=m$, se c'interessi che la x resti sola nel primo membro, convien toglìervi il $-c$. Ora togliere $-c$ è un togliere la sottrazione algebrica del termine c, sottrazione che si era fatta alla x perchè divenisse uguale alla m, il che è lo stesso che dire, aggiungere c al 1° membro. Or se mentre togliamo $-c$ al 1° membro veniamo ad aggiungervi c (§. 22) volendo poi che il 1° membro rimanga eguale al 2°, convien che al 2° ancora aggiungiamo la stessa quantità c; cosicchè otteniamo $x=m+c$. Allo stesso risultato giungiamo, se materialmente ad ambi i membri dell'equazione $x-c=m$ si aggiunga $+c$. Si ottiene infatti $x-c+c=m+c$ che si riduce alla $x=m+c$. *Si trasporta dunque un termine affetto dal — da un membro all'altro senza alterarne l'eguaglianza, cambiandogli il segno.*

118. E in una accogliendo queste due regole, e ripetendole per qualsivoglia termine ci piaccia in una equazione che ne abbia molti, conchiudere possiamo, che *se ne interessi di togliere uno o più o tutti i termini di un membro, senza alterare la verità della eguaglianza, basta porli nell'altro col segno opposto.*

Così avendosi

$$2x+3cm^2-3a=x+4cm^2$$

trasportando $3cm^2-3a$ dal 1° nel 2° membro e la x dal 2° nel 1°, otteniamo.

$$x=cm^2+3a$$

Così avendosi

$$x+2m^2-c=3m^2-2c+f-3h$$

trasportando tutti i termini del 2° membro nel 1°, lo che suol dirsi *ridurre la equazione a zero*, otteniamo

$$x-m^2+c-f+3h=0$$

E poichè in questa equazione ridotta a zero il sinistro membro è zero, e non può esser zero un assieme di termini, se la somma dei positivi non sia uguale a quella dei negativi, ovvero se la somma delle quantità *poste* non sia eguale alla somma di quelle che *si debbono sottrarre*, ne segue che *nel sinistro membro delle equazioni a zero, sempre la somma dei termini positivi è uguale a quella dei negativi*; e quindi nel nostro esempio, abbiamo

$$x+c+3h=m^2+f.$$

Collocando tutti i termini di un membro nell'altro, e viceversa, la equazione $-x+c=m-n$ diverrà (§. 118) $-m+n=x-c$; e ponendo ora il 2° membro nel posto del 1° e viceversa, avremo $x-c=-m+n$, equazione che confrontata con la prima ci prova che *la eguaglianza sussiste se si cambi segno a tutti i termini del*

1° *e* 2° *membro* (*a*). E a questa operazione si ricorre quando interessi di aver positivo un termine che nella equazione è negativo, o viceversa.

119. Egualmente *il sinistro membro di una equazione a zero* rimane zero, se venga cambiato il segno a tutti i suoi termini. Ed in vero non per altra ragione il sinistro membro di una equazione è $= 0$ se non perchè la somma dei suoi termini positivi è uguale a quella dei suoi termini negativi, ed è ben chiaro che quando il minuendo è uguale al sottraendo si ha per residuo zero anche allorquando si prenda per minuendo il sottraendo e viceversa (*b*).

Conseguenze del II° Assioma.

Se ci piaccia, senza alterare la verità di una equazione, eliminare il coefficiente di un di lei membro (e tale dicesi un fattore qualunque che esista nell' unico termine da cui il membro è costituito quando è monomio, o quel fattore che è comune a tutti i termini del membro stesso quand'è polinomio) siccome il membro in cui esisteva il fattore che si sopprime, in grazia di questa soppressione viene ad esser diviso per quel fattore, così basta che per quello stesso fattore dividiamo pur l' altro membro. In tal guisa abbiamo quoti di quantità eguali diviso per una medesima quantità, e perciò eguali. Così avendosi $mx = a$, e volendo liberare la x dal coefficiente m, avremo $x = {}^a/_m$. Così pure avendo $cx + mx = a$, ossia $x(c+m) = a$, otteniamo $x = {}^a/_{(c+m)}$. Viceversa se ci piaccia eliminare il divisore di un membro senza che la verità dell' equazione sia alterata, è d' uopo per esso moltiplicar l'altro membro, giacchè così ambi i membri eguali moltiplicati por una stessa quantità danno prodotti eguali.

Così $m = {}^a/_y$ diviene $my = a$; e $c = {}^r/_{u+s}$ *diviene* $(u+s)c = r$. Da ciò risulta che *si può eliminare il coefficiente* o *il divisore di un membro col porlo come divisore o coefficiente dell' altro*.

120. Se poi ne piaccia di eliminare una quantità qualunque, p. e. la r che esista nei denominatori di qualche termine di una equazione, conviene distinguere due casi: I. quando cioè si trovi la r nei denominatori non legata ad altre quantità per mezzo di addizione o sottrazione, ma o sola, o costituente un loro fattore: II. quando essendovi denominatori polinomii, la r sia fattore d' un qualche termine soltanto di essi. Nel I. caso conviene moltiplicare per la r soltanto ambi i membri dell'equazione; poichè in tal guisa (conservandosi l' eguaglianza fra i membri) facciamo sì che col ridurre alla menoma espressione ogni termine, sparisca dal denominatore quella r, che appunto per quest' oggetto abbiamo introdotta come fattore nel numeratore d' ogni termine. Così l' equazione ${}^a/_{3r} - {}^c/_m = {}^a/_{cr} + r$, coll' indicato espediente diventa ${}^a/_3 - {}^{cr}/_m = {}^a/_c + r^2$. Nel II. caso poi conviene moltiplicare ambi i membri non pel prodotto di tutti i denominatori, il che alle volte renderebbe i risultati troppo complicati, ma pel prodotto che nasce dal moltiplicare tutti i soli loro diversi fattori polinomii (in cui sia la r) tra di loro, e con la r se mai essa r sola esista ancora come fattore in qualche denominatore monomio, giacchè trovandosi così nel numeratore di ogni termine e la r e ogni fattore polinomio di cui la r è una parte, allorchè si fa la riduzione, dee certamente sparire in ogni denominatore o la r o il fattore polinomio che la contiene. Così avendosi ${}^1/_3 + {}^a/_{cr} + {}^n/_{a(m-r)} = {}^1/_{(m+r)} + {}^a/_{(m-r)} - {}^c/_{2r}$; il prodotto di r e di tutti i diversi fattori polinomii contenenti r è $r(m-r)(m+r) = m^2r - r^3$. Per questa quantità moltiplicando ambedue i membri dell' equazione, ossia ciascuno dei loro ter-

(*a*) Così se avessimo $-3+7 = 13-9$, cioè $4 = 4$, cambiando i segni a tutti i termini, abbiamo $+3-7 = -13+9$ cioè $-4 = -4$. Or se quest' ultima espressione non é a rigore una eguaglianza di quantità, perchè -4 esprime nell' uno e nel altro membro sottrazione di quantità e non quantità (§.15) ed altro non ci significa che quando ad ambi i membri venga aggiunta una egual quantità e tale, da poter nell' uno e nell' altro eseguire la indicata sottrazione del 4, i residui saranno eguali, è altresì vero che questo è un fatto di calcolo il quale può giovarci, perchè se nella espressione equivalente alla $-4 = -4$ ossia nella $3-7 = -13+9$ fosse ignoto il primo termine, si avesse cioè $x-7 = -13+9$, noi isolando la x con aggiunger 7 ai due membri (cosicchè quella or mentovata sottrazione possa aver luogo che prima era ineseguibile) passiamo da quel fatto di calcolo, che non ci esprimeva per sè cosa alcuna interessante, all' utile equazione finale $x = -13+9+7 = 3$.

(*b*) Così essendo $10-4+2-8 = 0$, cambiando i segni a tutti i termini, abbiamo $-10+4-2+8 = 0$ perchè come $+(+10+2)-(4+8) = 0$, così egualmente $-(10+2)+(4+8) = 0$.

mini e poi riducendo alla menoma espressione quelli che ne sono suscettibili (lo che può farsi ad un tratto col moltiplicare il numeratore di ciascun termine frazionario pel prodotto di tutti i detti fattori ad eccezione di quello, se vi è, che esiste nel proprio denominatore ed in cui si cancella) risulta

$$^{4}/_{3}(m^{2}-r^{2})+\frac{a(m^{2}-r^{2})}{c}+\frac{n(mr+r^{2})}{a}$$

$$=mr-r^{2}+a(mr+r^{2})-{}^{c}/_{3}(m^{2}-r^{2})\,.$$

121. Conseguenza del 2° assioma si è pure che *nelle equazioni ridotte a zero, riman sempre il primo membro eguale a zero, se tutti i suoi termini si moltiplichino o si dividano per una stessa quantità*. Ed in vero se in queste equazioni il primo membro è uguale a zero perchè la somma dei suoi termini positivi è uguale a quella dei negativi, queste due somme poi rimarranno eguali e daranno zero di risultato, se verranno moltiplicate o divise per una stessa quantità, siccome accade quando a questa operazione si assoggettano tutti i termini che costituiscono il 1° membro. Così avendosi $ax+ac-m=0$, moltiplicando il 1° membro per m otteniamo $amx+acm-m^{2}=0$; e dividendo in vece per a, otteniamo $x+c-{}^{m}/_{a}=0$.

Formola generale
delle equazioni di 1° grado a un' incognita,
sua risoluzione ed analisi.

122. Posti questi principi, per dare a qualunque equazione di 1° grado a una incognita la medesima forma, e la più semplice non solo ma la più analoga ancora a quella che dagli Algebristi suol darsi alle equazioni di tutti i gradi nella loro generale teoria, giacchè non v' è nell' insegnamento cosa che sia più giovevole dell' uniformità accompagnata dalla precisione, conviene 1° fare sparire la x dai denominatori, se mai in essi esistesse: 2° conviene poi recare nel primo tutti i termini che sono nel secondo membro, sicchè dosso divenga *zero*; e ciò fatto è chiaro che il 1° membro non risulta che di due sole sorte di termini, cioè dei *noti* o di quelli che hanno per *fattore* la x. Tutti i termini noti affetti dal + o dal − interi o frazionari che sieno, possono riguardarsi come costituenti un tutto polinomio che potremo esprimere per a. Per rapporto poi all' altra sorte di termini, per rapporto cioè a quelli che hanno per fattore la x, ponendo in evidenza la x, quando essi termini sono più d' uno, e chiamando c la quantità monomia o polinomia per la quale è moltiplicata la x, che perciò dicesi il di lei coefficiente, è chiaro che potremo esprimerli tutti per cx. Quindi qualunque più intricata equazione di 1° grado a un incognita potrà prendere questo aspetto generico $cx+a=0$.

Ora per dedurre da questa equazione generale, per la quale tutte possono rappresentarsi le equazioni di 1° grado a una incognita sola, il valore di x, portiamo $+a$ nel 2° membro ed avremo (§. 118) $cx=-a$: dividiamo ambi i membri per c ed avremo $x={}^{-a}/_{c}$: cioè l' incognita è uguale all' assieme delle quantità note, prese tutte col segno opposto a quello che hanno nella formola generale, diviso pel coefficiente dell' incognita stessa (a).

E che realmente ${}^{-a}/_{c}$ sia il valore della x, ne abbiamo una riprova sostituendolo alla x nella equazione generale, giacchè essa allora convertesi nella equivalenza

$cx\times{}^{-a}/_{c}+a=0$,

donde risulta ${}^{-ac}/_{c}+a=0$

e quindi $-a+a=0$

e finalmente l' identità $0=0$

Ed ecco avvicinate per le equazioni di 1° grado ad un' incognita le quattro seguenti uguaglianze.

Formola generale .... $cx+a=0$

Equazione finale .... $x=\dfrac{-a}{c}$

Equivalenza ...... $c\times\dfrac{-a}{c}+a=0$

Identita' .... $0=0$

(a) Che se poi piacesse di non ridurre l' equazione a zero, ma di considerare in vece le quantità note come esistenti tutte nel 2° membro (lo che può benissimo praticarsi, mentre l' equazione si è ridotta a zero unicamente perchè siavi uniformità con le formole generali delle equazioni dei gradi superiori) in tal caso convien dire che la formola generale è $cx=a$ e la finale è $x={}^{a}/_{c}$ ossia la x è uguale all' assieme delle quantità note prese con lo stesso segno che hanno nella formola generale, diviso pel coefficiente di x.

123. Di queste formole passiamo ora all' analisi, e cominciamo dal tener per fermo che la x è sempre affetta dal $+$ reale ossia che ciò che si ricerca è *cosa* e non *sottrazione di cosa*. Ed in vero non solo in tutti i quesiti nei quali trattasi di trovare una cosa che vada posta od aggiunta ad altre, ma in tutti i quesiti pur anche nei quali si tratti di trovare una cosa che vada sottratta da altre, ciò che si cerca è sempre affetto dal $+$. Quantunque della cosa cercata debba farsi sottrazione, non v' è mai uso di cercare *di che quantità dobbiamo far sottrazione*, nou vi è mai l' uso di concepire la nostra ricerca in guisa che ne sia soggetto *la sottrazione della cosa*, ma siamo soliti a ricercar sempre *la cosa che si debbe sottrarre*: in breve non si cerca mai $-x$, ma $+x$; o tanto è vero che esigendo l' enunciato che la cosa cercata sia sottratta, noi in quella equazione particolare che ne è la traduzione, scriviamo $-x$, e modifichiamo i termini dell' equazione in modo che senza alterarne la verità, si giunga ad avere nella equazione finale la x sola affetta dal $+$ (a).

124. Dimostrato così che il segno da cui è affetta la x nella equazione finale è sempre il $+$ *reale*, avvertiamo poi che algebrico è il segno $+$ che precede tanto la quantità nota a che il c coefficiente della x, potendo essere affetto dal $+$ o dal $-$ reale a tenore delle condizioni dei diversi problemi; ed appunto riguardo avendo al segno da cui e l'a, ed il coefficiente c sono affetti, ed al loro valore o alla loro nullità, a cinque diversi casi dà luogo la formola generale $cx+a = 0$. Può darsi infatti che I. c ed a abbiano segno reale diverso, II. che l' abbiano eguale, III. che sia solo $c = 0$, IV. che sia solo $a = 0$: V. che sia $c = 0$ ed $a = 0$. Esaminiamoli.

125. I. Nei due seguenti modi c ed a possono avere segno reale diverso

$$\text{(A)}\quad +cx-a = 0$$
$$\text{(B)}\quad -cx+a = 0$$

Ma la (B) senza alterarsi può cambiarsi in in (A) cambiando il segno a tutti i termini (§. 119); e dalla (A) risulta $x = +{}^a/_c$. Dunque quando a e c hanno segno diverso l' incognita è positiva, ossia ha un valore; e questo è l' unico dei cinque casi in cui a rigore il problema è risolvibile.

Esempio. *Quanto era il patrimonio di Cajo, se tutto consiste nella metà che ne ha avuta l' erede, nel terzo dato alla moglie o in lire 100 date al domestico?*

$$x = {}^x/_2 + {}^x/_3 + 100$$
$$x - {}^x/_2 - {}^x/_3 = 100$$
$$(1 - {}^1/_2 - {}^1/_3)x = 100$$
$$x = \frac{100}{(1 - {}^1/_2 - {}^1/_3)} = \frac{100}{{}^1/_6} = 600$$

(a) Così nel problema « *Quanti anni sono scorsi da che l' età del figlio or quindicenne fu il quarto dell' età del padre che ha 48 anni* » noi cerchiamo gli anni che si debbono *togliere* all' attuale età del padre e del figlio. Ciò non ostante, sebbene le condizioni esigono che la cosa cercata debba sottrarsi, la cosa cercata x è sempre appunto cosa; e diciam pure per pleonasmo è *cosa positiva*. Ed appunto perchè la x è cosa positiva, e perchè questa cosa positiva noi dobbiamo *togliere* dalla età del padre e del figlio, la scriviamo col segno $-$ nella traduzione dell' enunciato in equazione così

$$48-x = 4(15-x)$$

donde la equazione finale $x = +4$, la quale ci esprime che la quantità (e aggiungiamoci pure l' inutile epiteto di positiva) la quantità positiva, quale è la somma degli anni a sottrarsi dalle attuali età del padre e del figlio, è 4 anni.

E tanto è vero che la cosa che cerchiamo è sempre cosa, ed è perciò positiva, che se mai fosse accaduto che l' equazione finale ci avesse dato per risultato -4 come avvenuto sarebbe se il padre avesse ora anni 72 e non 48, ben errato andrebbe chi credesse che il risultato -4 esprimesse che dobbiamo sottrarre anni 4 dall' età del padre e del figlio. Sostituendo infatti -4 al $-x$ nell' equazione che esprime l' enunciato del problema

$$72-x = 4(15-x)$$

ci accorgiamo tosto che le condizioni non sono soddisfatte, e quindi ci avvediamo che $x = -4$ è l' indicazione di un assurdo, è l' indicazione cioè che la quantità positiva $+x$, numero degli anni che vogliamo poi sia sottratto dall' età del padre e del figlio, e che perciò poniamo in istato di sottrazione nell' equazione in cui è stato tradotto l' enunciato scrivendo $-(+x)$ ossia $-x$ non v' è, perchè non v' è risultato positivo; e poichè in sua vece la equazione finale ci dà $+x = -4$, questa ci avverte che il $+x$ cercato è -4, ci avverte cioè che dovevamo porre nell' enunciato non $-(+x)$ ma $-(-x)$. In somma -4 ci dice che gli anni che noi credevamo di dover sottrarre sono un impossibile: che gli anni sono 4, ma che in vece di sottrarsi come l' enunciato esprimeva, è d' uopo che sieno aggiunti perchè se dobbiamo porre -4 in vece di $+x$, dobbiamo perciò porre $+4$ in vece di $-x$ e che perciò la condizione in vece di essersi verificata quattro anni indietro come supponevasi, andrà a verificarsi da qui a quattro anni.

126. II. Quando c ed a hanno lo stesso segno reale, la cosa che cerchiamo è impossibile che esista sotto le volute condizioni: e ciò ci si fa manifesto tanto se consideriamo la formola generale applicata al nostro caso, che la sua risoluzione. Nei seguenti due modi possono c ed a avere lo stesso segno: quando cioè si abbia

$$(D)\ +cx+a=0$$
$$(E)\ -cx-a=0$$

Ma l' (E) senza alterarsi viene trasformata in (D), cambiando il segno ai suoi termini; e dalla (D) risulta $x=-{}^a/_c$: dunque quando a e c hanno lo stesso segno, sempre si ha $+cx+a=0$ equazione con che si esprime l' assurdo che *l' assieme di due quantità è uguale al nulla*; e si scende alla finale $x=-{}^a/_c$ con la quale l'altra assurdo indichiamo che *una cosa è uguale alla sua sottrazione.* Ed in vero finchè consideriamo la quantità negativa $-{}^a/_c$ isolata e non in relazione d' uguaglianza con altra quantità, il $-{}^a/_c$ come abbiamo già veduto (§. 16. Nota) esprime realmente un concetto, ci indica cioè che *debbe sottrarsi* $+{}^a/_c$; *e manca il minuendo su cui potere eseguire la sottrazione*: ma quando al $-{}^a/_c$ facciamo uguale una quantità quale è la x, e diciamo $x=-{}^a/_c$, noi non esprimiamo un concetto, ma un assurdo, noi diciamo di cercare una cosa quale è la x, ammettiamo perciò l' esistenza di questa cosa cercata, ma pretendiamo in pari tempo che questa cosa non esista perchè la vogliamo uguale al residuo d' una sottrazione che le condizioni del problema esigono che non possa eseguirsi per mancanza di minuendo. L' assurdità ci si fa ugualmente manifesta, se riflettiamo che $x=-{}^a/_c$ è lo stesso che $x=-x$. La contraddizione nei termini è in questa espressione ben chiara; poichè essendosi stabilito che ciò che si cerca sia sempre una cosa, l' equazione ci dice che ad oggetto sieno soddisfatte le condizioni del problema, è d' uopo che *la cosa che si cerca sia uguale alla sottrazione di sè stessa*, è d' uopo cioè che la cosa che si cerca sia ciò che non si cerca, patentissimo assurdo.

Ma questa stessa contraddizione che ha luogo in tutti i problemi nei quali c ed a hanno il medesimo segno, ci fa strada a correggere l' assurda richiesta con un cambiamento che trasformi il problema (che è impossibile perchè esige $+cx+a=0$) nella natura di quelli del 1° caso (§ 125) che sono risolvibili perchè esigono $-cx+a=0$. Questa trasformazione dall' impossibile nel reale altro non esigendo (come risulta dal confronto delle esposte due formole) se non che venga convertito il solo $+cx$ in $-cx$, e rappresentando cx l' assieme di tutti i termini che contengono l' incognita, ognun vede che l' intento si ottiene col modificare le condizioni in modo, se la natura del problema il permetta, *che venga cambiato il segno a tutti i termini che contengono la x*.

127. Questa possibilità di soluzione mercè l' indicato facile cambiamento che i problemi ricevono anche quando la x ha un valore negativo, ha fatto sì che gli Algebristi abbiano dato a queste soluzioni il nome di *soluzioni negative.* Coll' usar dunque la laconica espressione che un problema ha una soluzione negativa, veniamo ad esprimere questo concetto. *Il così detto valore negativo di* x *mentre ci dimostra l'assurdità del problema, ci prova in pari tempo, che può avere una soluzione quando il suo enunciato sia modificabile a tenore del cambiamento del segno fatto in tutti i termini in cui esiste l' incognita*. E ben si avverta che dicendo « *la soluzione negativa riferisi al problema modificato* » veniamo a dire che si riferisce ad un problema che sebbene vi dipenda, a rigore però, più non è quello che volevasi sciogliere. Conchiudiamo dunque, che *quando nella formola generale* a zero ridotta, hanno la c e l' a *segno uguale*, *il problema è assurdo*: *ma spesso l' Algebra ci suggerisce la soluzione di un problema che vi dipende*.

128. Esempio. *Avea Marco un patrimonio, di cui* ${}^3/_4$ *al figlio, ed* ${}^1/_3$ *più lire* 100 *lasciò alla moglie. A quanto il patrimonio ammontava?* Il risultato è lire -1200.

Abbiamo infatti $x={}^3/_4x+{}^1/_3x+100$,

donde $(1-{}^3/_4-{}^1/_3)x=100$;

ossia $-{}^1/_{12}x=100$

ed $x=\dfrac{100}{-{}^1/_{12}}=-1200$

E con questo valore negativo -1200 l' Algebra tosto ci rende avvertiti essere un' assurda condizione il distribuirsi del patrimonio in guisa, che dopo i ${}^3/_4$ dati al figlio, ne rimanga ${}^1/_3$ più lire 100 per la moglie. E l' Algebra stessa, mentre ci fa

toccare con mano l'errore, che ci è sfuggito, di supporre che dopo aver tolto ad una cosa i $^3/_4$, possa rimanerne $^1/_3$ e 100, (mentre non ne può rimanere che $^1/_4$) il modo pure ci suggerisce di correggere lo sbaglio commesso, facendoci cambiare il segno a tutti i termini in cui esiste la x nella equazione in cui si è tradotto il problema. Essa con questa mutazione semplicissima passa tosto ad indicare non più un assurdo, ma una verità. Diventa

$$-x = -{}^3/_4x - {}^1/_3x + 100, \text{ ossia (§.118)}$$

$$\text{(A)} \quad x = {}^3/_4x + {}^1/_3x - 100,$$

donde $x = 1200$.

E modificando le assurde esposte condizioni a tenore della equazione (A), può dirsi essere essa la traduzione algebrica di questo problema » *Quant' era il patrimonio di Marco, se $^3/_4$ ne ha donato al figlio, e se al rimanente che ha donato alla moglie non mancano che lire 100, perchè possa dirsi che il dono fatto alla Moglie è uguale al terzo del patrimonio medesimo?* (*a*).

129 III. Quando $c = 0$, cosicchè la formola generale diventa $x \times 0 + a = 0$ donde $x = -{}^a/_0$, il problema è assurdo; e tale ce lo dimostra l'equazione generale, e la sua risoluzione: ce lo mostra l'equazione generale, perchè essa esigerebbe che la x mai presa, più o meno una quantità a sia zero, ossia che il porre, o togliere la quantità a sia non far nulla: ce lo mostra poi l'equazione finale, poichè ivi la x è espressa da un quoto qual' è $-{}^a/_0$; e il quoto è tal quantità che moltiplicata pel divisore che è zero debbe dare il dividendo che è $-a$. Or questo è impossibile, perchè qualunque quantità moltiplicata per 0, ossia *mai ripetuta* dà sempre zero. E poichè questa impossibilità che lo zero ripetuto dia una quantità, sempre sussiste finchè sussiste il $c = 0$ voluto dall'ipotesi, ne segue che in questo III° caso il problema non solo è assurdo, come nel II°, ma è *un assurdo immodificabile*.

130. Esempio. *Quant' è il patrimonio di Marco, se viene distribuito in modo che il figlio maggiore ne abbia la metà, l'altro ne abbia un terzo, ne abbia un sesto la moglie, e lire 100 il domestico?* Fatto il patrimonio $= x$, e $100 = c$, il risultato è $x = {}^a/_0 = {}^{100}/_0$.

Ed in vero $x = {}^1/_2x + {}^1/_3x + {}^1/_6x + a$ donde $x = {}^a/_0 = {}^{100}/_0$.

L'eredità è dunque $^{100}/_0$, è cioè tal quantità che moltiplicata per zero, ossia mai presa, debbe dar 100. E questo è un assurdo immodificabile (*b*).

131. IV. Quando $a = 0$ cosicchè la formula generale diventa $cx = 0$, donde $x = {}^0/_c$ il problema è parimenti assurdo; e tale ce lo dimostra e l'equazione generale nella quale si pretende che una cosa (qual' è la cercata) ripetuta più volte sia nulla, e la finale la quale ci annuncia, che il quoto che esprime la x è tal quantità $^0/_c$ che moltiplicata pel divisore c dia per prodotto il dividendo zero, mentre qualunque quantità per quanto tenue si voglia, ripetuta un dato numero di volte dà per prodotto qualche cosa e non zero. E siccome questo impossibile, che cioè una cosa presa un dato numero di volte dia zero, sussiste, fino a chè sussiste la condizione $a = 0$ voluta dalla ipotesi, così in questo IV. caso *il problema è assurdo immodificabile* come nel III. Si cerca infatti una cosa; e le condizioni esigono che la cosa non esista.

132. Esempio. *Pasquale pria minorenne giunto appena al possesso di due eredità uguali che ben pingui due zii gli lasciarono, gra-*

(*a*) Le condizioni così modificate si adattano assai meglio al problema primitivo di quello che vi si adatti la supposizione che il -1200 esprima un debito, siccome opinerebbe chi accordando al segno — la virtù *qualificante*, nel -1200 altro vedere non sapesse che l'indicazione di una cosa opposta al capitale 1200.

(*b*) Presso la comune dei Matematici la formola $^a/_0$ è l'espressione dell'infinito. Ma per potere in ciò convenire, fa d'uopo rinunziare alla massima che lo zero esprima la deficienza d'ogni qualsiasi quantità, ed ammettere in vece che possa adoperarsi pur anche per l'indicazione d'una quantità infinitesima. Posta questa inesattezza, il quoto $^a/_0$ esprimendo il quante volte una quantità infinitesima è contenuta in una quantità a può ben prendersi per infinito, perchè l'infinitesimo è contenuto infinite volte in una quantità determinata qualunque. Perchè però l'espressione generica $^a/_0$ esprima l'infinito, è necessario ammettere l'inesattezza che una quantità infinitesima sia uguale a zero, e in secondo luogo è necessario che tale sia l'indole della ricerca da ammettere l'idea dell'infinito, come p. es. avverrebbe se si trattasse di tempo. In tutt'altre ricerche, e per es. nel nostro caso, sarebbe certamente falso e ridicolo che per essersi ottenuto $x = {}^a/_0$, si dicesse che l'eredità di Marco è una quantità infinita.

tifica tosto il benemerito tutore con $^1/_5$ del proprio suo patrimonio a : *dissipa* $^3/_{10}$ *di* a *in viaggi; e così con tutte le due uguali eredità acquistate, non rimane possessore che della metà di* a . *A quanto ascendeva ciascuna delle due eredità che gli ha consegnate il tutore?* Il risultato è zero.

Chiamata x ciascuna delle due eredità, abbiamo $2x+a = {}^1/_5 a + {}^3/_{10} a + {}^1/_2 a$
donde $x = {}^0/_2 = 0$

133. V. Finalmente quando $c = 0$ ed $a = 0$, cosicchè la formola generale diventa $0 \times x + 0 = 0$, donde $x = {}^0/_0$, il problema si verifica per qualunque valore che alla x si conceda. E ciò è dimostrato dalla equazione generale nella quale si esprime che la cosa cercata debba essere tal quantità che moltiplicata per zero più zero dia zero, ed è chiaro che ogni quantità verifica questa condizione; e dalla finale la quale ci esprime che il valore della x, essendo il quoto ${}^0/_0$, è tal quantità, che moltiplicata pel divisore zero debbe dare per prodotto il dividendo zero; e a questa condizione parimenti soddisfa qualunque numero. Perciò *il problema non ha soluzione determinata*.

Esempio. *Il patrimonio di Marco è lasciato in eredità per la metà al figlio maggiore, per un terzo al minore, per un sesto alla moglie. A quanto esso ammonta?* Il risultato è ${}^0/_0$ ossia è una somma qualunque. Infatti

$x = {}^1/_2 x + {}^1/_3 x + {}^1/_6 x$

donde $(1 - {}^1/_2 - {}^1/_3 - {}^1/_6)x = 0$

e quindi $x = {}^0/_0$.

134. Ed ecco in epilogo qui sotto esposti tutti i cinque diversi casi particolari (nei quali perciò si dà ai segni un valore reale) che sono compresi sotto la formola generica $x = {}^{-a}/_c$.

$x = +{}^a/_c$	$x = -{}^a/_c$	$x = {}^a/_0$	$x = {}^0/_c$	$x = {}^0/_0$
Problema a soluzione determinata	Problema assurdo modificabile	Problema assurdo immodificabile	Problema assurdo immodificabile	Problema a soluzione indeterminata
Risultato Il quoto d'una quantità divisa per un'altra	Risultato Una quantità uguale alla sua sottrazione	Risultato Una cosa che mai posta dia una quantità	Risultato Una cosa che posta qualche volta dia zero	Risultato Una quantità che mai presa dia zero

ESERCIZIO

Dopo di avere analizzato la formola generale delle equazioni di 1° grado a una incognita, passiamo ad applicarla alla soluzione di qualche problema.

135. E prima d'ogni altro quello ci proponiamo risolvere che fu semplicemente enunciato per dare un'idea del modo con cui i quesiti vanno tradotti in equazione. La equazione piuttosto complicata che se ne ottenne (§.115) fu la seguente

$$(A)\quad x + \frac{c^2 r}{a^2} = \frac{c^2}{a} + \frac{r^2 x}{a^2}$$

trasportando tutti i termini del 2° membro nel primo, si ha

$$x + \frac{c^2 r}{a^2} - \frac{c^2}{a} - \frac{r^2 x}{a^2} = 0$$

e ponendo in evidenza la x, si ha

$$\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)x + \frac{c^2 r}{a^2} - \frac{c^2}{a} = 0$$

equazione che è la stessa formola generale $cx+a = 0$, quando riflettasi che in questo caso particolare

$$c = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \text{ ed } a = \left(\frac{c^2 r}{a^2} - \frac{c^2}{a}\right)$$

ond'è che al caso nostro applicando la risoluzione generale $x = {}^{-a}/_c$ avremo

$$x = \left(-\frac{c^2 r}{a^2} + \frac{c^2}{a}\right) : \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{c^2}{a+r} = 10,$$

E il risultato 40 si ottiene sostituendo alle lettere i numeri offertici dal problema al (§. 110), sicchè conchiudiamo, che anni 40 è l'età della madre, e questo valore 40, vedesi soddisfare alle condizioni del problema se ad x sostituiscasi nella prima equazione (A).

136. *Un pigro pittore si è obbligato ad un lavoro a condizione di ricevere stipendio in ragione di lire 15 al giorno per tutto il tempo che dipinge, e di sborsare a ragione di lire 5 al giorno per tutto il tempo che sta in ozio nelle ore 10 stabilite per la giornaliera occupazione. Dopo 60 giorni riceve 24 lire. Quante giornate ha lavorato?* Il Risultato è giornate $16+\frac{1}{3}$.

In questo problema, implicito è il rapporto d'eguaglianza, ma agevolmente si deduce dalle sue condizioni, riflettendo che lire 24 sono l'eccesso delle lire guadagnate sulle perdute, e son perciò eguali al guadagno meno la perdita. Ora

Numero delle giornate di lavoro è $= x$
Numero delle giornate passate in ozio $= 60-x$
Lire guadagnate nei giorni di lavoro $= 15x$
Lire perdute nei giorni di ozio $= 5(60-x)$

Ma le lire guadagnate meno le perdute sono 24: dunque $15x-5(60-x)=24$, donde $x=16+\frac{1}{3}$ (§. 122).

137. « *Si promettono a un pescatore scudi 7 per ogni tratta di rete col pesce, a patto che debbe pagarne 4 per ogni tratta in fallo. Dopo trenta tratte ha guadagnato scudi 89. Quante sono state le tratte felici, e le vuote di effetto?* Il Risultato è che le prime sono state 19, e 11 le altre ». L'indole di questo problema è simile all'antecedente, eppure se vi si applicassero i suoi numeri, sarebbe impossibile, perchè si avrebbe un risultato frazionario che non può conciliarsi col numero delle tratte, come conciliasi col numero delle giornate.

138. « *L'età della figlia è attualmente la metà dell'età di sua madre: 13 anni fà ne era il terzo. Qual'è l'età di ambedue?* Il Risultato è che la madre ha 52 anni, e 26 la figlia ». Posta l'età della madre $= x$, l'età della figlia è $x/_2$: l'età della madre 13 anni fà era $x-13$: l'età della figlia 13 anni fà era $x/_2-13$; ma allora l'età della figlia era il terzo di quella della madre: dunque $x/_2-13={}^{(x-13)}/_3$; donde $x=52$ e $x/_2=26$.

139. Se alle condizioni esposte aggiungessimo « *che la figlia, la quale ora ha la metà, 13 anni fa aveva il quarto dell'attuale età della madre* » ponendo in equazione la condizione ora esposta, abbiamo $x/_2-13=x/_4$ donde $x=52$. Ben si vede perciò che quando i problemi a una incognita ci offrono tali condizioni che ci danno più d'una equazione, ci offrono più strade per la loro soluzione; poichè da ciascuna equazione può dedursi l'incognita.

140. Ma se in vece della condizione ora esposta, si aggiungesse l'altra « che mentre ora l'età della figlia è la metà, 10 anni in dietro stata fosse un quarto dell'età che aveva allora la madre » questa condizione ci darebbe $x/_2-10={}^{(x-10)}/_4$, donde $x=30$. In tal caso il problema, dalla condizione attuale è reso impossibile, poichè a tenore della prima condizione la madre ha 52 anni e 26 la figlia: a tenore poi di questa, la madre ne ha 30 e la figlia 15. L'una e l'altra di queste condizioni separatamente prese sono verificabili: insieme considerate sono poi incompatibili e assurde, non essendo conciliabile che l'età della madre sia di anni 52 e di anni 30 ad un tempo, e quella della figlia di 26 e di 15. Quando dunque un problema ci offre più condizioni, perchè sia risolvibile, fa d'uopo che esse non si escludano mutuamente.

Risoluzione delle equazioni di 1° grado a più incognite.

141. Dando principio dalle equazioni a due incognite sole, notiamo che quando per a, e, m, s'intendano quantità qualunque, monomie o polinomie, positive o negative, intere o frazionarie, la loro formola generale è $ax+ey+m=0$. Or se cerchiamo per primo il valore della x, e colle note operazioni passiamo ad isolarla nel 1° membro, otteniamo $x={}^{(-m-ey)}/_a$ equazione da cui non risulta, come in quelle a un'incognita sola il valor della x, a motivo dell'esistenza nel 2° membro dell'altra incognita y. Egualmente se nella stessa formola isoliamo y, otteniamo $y={}^{(-m-ax)}/_e$ in cui parimenti il valore di y resta indeterminato, perchè il 2° membro che la e-

sprime, contiene la incognita x. Se dunque si ha un problema a due incognite, o le sue condizioni non ci danno che una sola equazione, noi siamo nella impossibilità di ottenere una sola soluzione determinata, perchè l'espressione di qualunque delle due incognite isolata nella finale equazione, tiene inclusa l'altra; e perciò non fa che avvertirci, che la x dipende dalla y, e la y dalla x in modo che cambiando l'una di valore, necessariamente dee cambiarlo anche l'altra. Il medesimo ragionamento ha pur luogo nelle equazioni a tre incognite, la cui formola generale è $ax+cy+mz+n = 0$; e così in quelle a quattro incognite ec., cosicchè conchiudiamo che i problemi non sono mai risolvibili finchè il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite. Quando però nei problemi a due sole incognite le condizioni ci danno oltre all'esposta anche un'altra equazione $a'x+c'y+m = 0$, e quando in genere si hanno problemi che ci dieno tante equazioni quante sono le incognite, in tal caso il valore è, come ora vedremo, determinabile: e tre sono i diversi metodi che possiamo praticare per ottenerli, i quali tutti consistono nell'*eliminare*, una alla volta le diverse incognite.

I. Metodo di eliminazione.

112. Il I° metodo che amiamo chiamare METODO *delle nuove equazioni formate con le diverse espressioni della incognita stessa*, piuttosto che *metodo delle eguaglianze*, ovvero *del paragone*, siccome piace a taluni, perchè queste denominazioni non valgono a caratterizzarlo, consiste nel dedurre da ciascuna equazione l'espressione di una sola e medesima incognita, che si ottiene, isolandole al modo stesso che si farebbe se tutte le altre quantità fossero note: nell'eguagliar quindi queste diverse espressioni della incognita stessa a due a due, formando così tante equazioni meno una, quante se ne avevano in principio, e nel ripetere la stessa operazione sulle nuove equazioni ottenute, con che si viene ogni volta ad eliminare un'incognita, finchè finalmente si giunge ad una sola equazione con una sola incognita. Trovato il valore di questa col metodo (§.122), a questa, risalendo indietro, si sostituisce il valore trovato in una delle prossime equazioni ove le incognite sono due sole, e si ottiene il valore d'un altra incognita: il valore trovato delle due incognite si sostituisce in una delle altre equazioni ove le incognite sono tre, e si scuopre la terza; e così di seguito. Ed eccone un esempio e in un problema (A) a due incognite e in un altro (B) a tre.

113. (A). « *Quante monete tengo chiuse nella mia sinistra e quante nella destra, posto che se al quintuplo di quelle che ho nella sinistra tu togli il triplo di quelle che ho nella destra hai 1 di resto; ed hai di resto 13 se dal settuplo delle monete che ho nella destra tu togli il quadruplo di quelle che ho nella sinistra?* » Queste condizioni danno

$$\text{I. } 5x-3y = 1\text{; II. } 7y-4x = 13$$

donde

$$\text{III. } x = {}^{3(y+1)}/_5\text{; IV. } x = {}^{(7y-13)}/_4$$

ed eguagliando le ottenute espressioni di x, si ha

$$^{(3y+1)}/_5 = {}^{(7y-13)}/_4$$

equazione ad una sola incognita, da cui ricavasi (§.122) $y = 3$. Sostituendo poi ad y il suo valore o nella I. o nella II., otteniamo $x = 2$.

114. (B) « *Tale è l'età* x *di Tizio, la età* y *di Marco, l'età* z *di Cajo che*

$$\text{I}\dots\ 2x+5y-3z = 3$$

$$\text{II}\dots\ 3x-4y+z = -2$$

$$\text{III}\dots\ 5x-y+2z = 9$$

quanta è l'età di ciascuno? Isolando la z in tutte e tre le equazioni, avremo

$$\text{I}\dots\ z = {}^{(2x+5y-3)}/_3$$

$$\text{II}\dots\ z = 4y-3x-2$$

$$\text{III}\dots\ z = {}^{(9+y-5x)}/_2$$

Paragonando il 1° di questi valori di z col 2°, ed il 2° col 3°, e togliendo i denominatori, abbiamo

$$2x+5y-3 = 12y-9x-6$$

ed..... $8y-6x-4 = 9+y-5x$

ossia... $7y-11x=3$; e $7y-x=13$

donde $y={}^{(3+11x)}/_7$; e $y={}^{(13+x)}/_7$

donde $x = 1$.

Sostituendo poi questo valore di x in qualunque delle due espressioni della y, otteniamo $y = 2$; ed otteniamo $z = 3$, sostituendo in qualunque delle tre espressioni di z tanto il valore della x che della y.

II. Metodo di eliminazione.

145. Il II° metodo, detto *delle sostituzioni*, consiste nel dedurre dalla prima equazione l'espressione d'una delle incognite, e poscia sostituirla alla stessa incognita nelle altre equazioni. Abbiamo così un'equazione e un'incognita di meno, e replicando sulle nuove equazioni lo stesso processo, sempre otteniamo un'incognita e una equazione di meno, finchè finalmente giungiamo ad un'incognita e ad una equazione sola, come possiamo rimarcare, risolvendo con questo metodo le medesime equazioni che abbiamo risolute col primo.

146. Ecco di nuovo qui riportate le equazioni del problema (A)

$$\text{I. } 5x-3y=1;\ \text{II. } 7y-4x=13.$$

Dalla 1^a si ha $x={}^{(1+3y)}/_5$; e sostituendo questa espressione di x nella 2^a equazione, questa diventa $7y-4\times{}^{(1+3y)}/_5=13$, donde $y=3$; ed $x={}^{(1+9y)}/_5={}^{(1+9)}/_5=2$.

147. Ecco di nuovo qui riportate le equazioni del problema (B)

$$\text{I}^a\ldots 2x+5y-3z=3$$

$$\text{II}^a\ldots 3x-4y+z=-2$$

$$\text{III}^a\ldots 5x-y+2z=9$$

Isolando z nella 1^a abbiamo

$$(\text{F})\ldots z={}^{(2x+5y-3)}/_3$$

sostituendo questa espressione di z nella II^a o nella III^a, trasformansi

la II^a in...$3x-4y+{}^{(2x+5y-3)}/_3=-2$

ovvero in........(G)....$11x-7y=-3$

la III^a in...$5x-y+{}^{(4x+10y-6)}/_3=9$

ovvero in.......(H)....$19x+7y=33$

Ora isolando y nella (G) abbiamo

$$(\text{L})\ldots y={}^{(11x+3)}/_7$$

e sostituendo questa espressione di y nella (H), la (H) diverrà $19x+11x+3=33$ donde $x={}^{30}/_{30}=1$. Sostituendo ora ad x il suo valore nella (L) otteniamo $y=2$; e sostituendo ad x e ad y i loro valori nella (F) otteniamo $z=3$.

III. Metodo di eliminazione.

148. Il III° metodo detto *delle sottrazioni di una equazione dall'altra* consiste, allorchè trattisi di due equazioni a due incognite, nel moltiplicare la 1^a equazione pel coefficiente che ha nell'altra equazione l'incognita, che vogliamo eliminare, e nel moltiplicare la 2^a equazione pel coefficiente che la stessa incognita ha nella prima; e quindi nel sottrarre algebricamente l'una equazione dall'altra. L'incognita infatti viene così eliminata, perchè i termini che la contengono si elidono nella sottrazione. Avendosi infatti $ax+by+c=0$; ed $a'x+b'y+c'=0$, eseguendo le indicate moltiplicazioni ad oggetto di eliminare la x, risulta $a'ax+a'by+a'c=0$ ed $aa'x+ab'y+ac'=0$, e sottraendo la 2^a dalla 1^a, si ha $(a'b-ab')y+a'c-ac'=0$. In simil guisa operando per la eliminazione della y, otteniamo $ab'x-a'bx+b'c-bc'=0$, dalle quali risulta

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\ \text{ed } y=\frac{ac'-a'c}{a'b-ab'}$$

che son le formole generali di risoluzione delle equazioni a due ignote qualunque.

149. Che se mai il particolar caso si desse che nelle due equazioni il coefficiente di x o di y fosse eguale, è ben chiaro allora che per la eliminazione della incognita che ha egual coefficiente in ambe le equazioni, il moltiplicare è inutile; e basta sottrarre un'equazione dall'altra, se il detto coefficiente ha in tutto e due lo stesso segno, o sommarle, se l'ha diverso.

150. Allorchè poi si tratti di 3 equazioni a 3 incognite, e di 4 a 4 incognite ec., conviene moltiplicar ciascuna o pel prodotto dei coefficienti che ha una stessa incognita in tutte e singole le altre, o almeno pel solo prodotto di tutti i loro fattori diversi (come si pratica per ridurre le frazioni allo stesso denominatore) ad oggetto di ottenere nuove equazioni, in cui il coefficiente della ignota presa di mira sia lo stesso: lo che fatto, sottraendo la 2^a dalla 1^a, la 3^a dalla 2^a equazione ec., otteniamo nuovi risultati in cui havvi un'equazione e un'incognita di meno che prima: e sulle ottenute equazioni di nuovo eseguendo la ora indicata operazione, otteniamo nuovi risultati in cui havvi un'equazione e un'incognita di meno, finchè finalmente giungiamo ad una equazione ad una incognita sola. Trovato allora il valore di questa, risalendo per le indietro ottenute equazioni, col sostituire ad x il suo valore, scuopriremo quello di y: col

sostituire ad x e y i loro valori scuopriremo quello di z ecc. ec. E ciò ne sarà dato di rimarcare risolvendo con questo 3° metodo le medesime equazioni che abbiam risoluto col 1° e 2°.

151. Ecco qui espresse di nuovo le equazioni del problema (A).

$$(A)...5x-3y = 1 \; ; \; 7y-4x = 13.$$

Moltiplicando ciascuna di queste due pel coefficiente che la x ha nell'altra, avremo

$$-20x+12y = -4 \; ; \; e \; 35y-20x = 65 \; ;$$

e sottraendo la 1^a dalla 2^a, si avrà

$$23y = 69 \text{ , ed } y = 3.$$

Moltiplicando poi ciascuna equazione pel coefficiente che y ha nell'altra, risulta

$$35x-21y = 7$$

$$-21y+12x = -39 \; ;$$

e sottraendo la 2^a dalla 1^a si ha

$$23x = 46 \text{ , donde } x = 2.$$

152. Ecco qui poste di nuovo le tre equazioni del problema (B)

$$\text{I}...2x+5y-3z = 3$$

$$\text{II}...3x-4y+z = -2$$

$$\text{III}...5x-y+2z = 9$$

Moltiplicando ciascuna equazione pel prodotto dei coefficienti che la x ha nelle altre, otteniamo

$$(\text{F})...30x+75y-45z = 45$$

$$(\text{G})...30x-40y+10z = -20$$

$$(\text{H})...30x-6y+12z = 54$$

Sottraendo ora la (G) dalla (F), e la (G) dalla (H), abbiamo

$$(\text{L})...115y-55z = 65$$

$$(\text{M})...34y+2z = 74$$

Moltiplicando ora ciascuna di queste due equazioni pel coefficiente che la y ha nell'altra, otterremo $3910y-1870z = 2210$, e $3910y+230z = 8510$, donde $z = {}^{630}/_{210} = 3$. Sostituendo poscia questo valor di z nella (L) o nella (M) otteniamo $y = 2$; e sostituendo a z e ad y i loro valori in qualunque delle equazioni (F), (G) ed (H), risulta $x = 1$.

153. Il *primo* di questi metodi, sebben più semplice degli altri, di raro s'impiega perchè troppo lungo. Il *secondo* presenta dei vantaggi quando vi sieno delle equazioni che non contengano tutte le incognite. Il *terzo* è il più in uso; e da esso abbiamo dedotta la formola generale della risoluzione delle equazioni a due incognite.

Non crediamo poi espediente dar le formole generali per la risoluzione delle equazioni a più incognite seguendo i calcoli di Laplace, perchè mentre da una parte sarebbero esse complicatissime anche per le equazioni a tre incognite sole, dall'altra parte si veggono non necessarie, ben risultando dall'esposto come senza di esse con qualunque dei tre indicati metodi possa l'intento ottenersi, qualunque sia il numero delle incognite di un problema, quando esso ci dia pure un corrispondente numero di vere equazioni. Che se il numero di queste è minore, gl'indicati metodi non si prestano alla risoluzione, ed allora il problema dicesi *indeterminato*: non è cioè risolvibile senza qualche supposizione lasciata al nostro arbitrio. Altri metodi di *eliminazione* più compendiosi, ma non generali sono suggeriti dalla particolar indole de'problemi, specialmente quando tutte le incognite non esistono in ciascuna loro equazione, ma di qualunque di essi metodi uso si faccia, conchiudiamo che la soluzione dei problemi a più incognite tutta dipende dalla soluzione dei problemi a un'incognita sola, e non esige di più che quell'artificio detto *eliminazione delle incognite* in cui da equazioni a molte, si giunge ad una equazione a un'ignota soltanto.

154. Per dare un esempio d'una soluzione fatta con metodi più compendiosi dei generali ora esposti, torniamo a risolvere il problema (§. 8.) « troviamo cioè i due numeri x, y di cui è nota la somma s e la differenza d ». È facile infatti l'accorgersi che sommando le sue due equazioni, cioè $x+y = s$; ed $y-x = d$, si ottiene $y = {}^{(s+d)}/_2$, e sottraendo la 2^a dalla 1^a si ha $x = {}^{(s-d)}/_2$. Per rapporto poi a questo problema è pure a marcarsi che nei diversi casi particolari, cui sono applicabili le due formole generali ora esposte, quando s è un numero pari, e d è dispari o viceversa, i due numeri x, y divengono frazionari, e in tal caso a tenore della particolar indole de'problemi, questi valori frazionari sono possibili od impossibili. Così gli stessi valori $27\frac{1}{2}$, e $22\frac{1}{2}$ che noi otteniamo dall'equazione $x+y$

$= 50$; $x-y = 5$ sono reali quando le equazioni derivano da questo problema. « Dividere una tavola di 50 piedi in due parti, l'una 5 piedi più lunga dell'altra » ma sono al certo impossibili se le istesse equazioni fossero la traduzione di quest'altro problema: « Far che siano 50 i commensali fra uomini e donne, e che il numero di questo ecceda di 5 quello degli uomini » poichè donne $27\frac{1}{2}$, e uomini $22\frac{1}{2}$ sono un assurdo.

Idea dei problemi indeterminati.

135. « *Si hanno 3 sorte di caffè: la* 1ª *è da 50 soldi, la* 2ª *da 38, la* 3ª *da 24 soldi la libbra. Di quanto di ciascuna sorte dovrà risultare una libbra per venderla a 30 soldi?* »

Chiaminsi x, y, u le rispettive frazioni della 1ª, 2ª, 3ª qualità di caffè, che formar debbono una libbra del misto, ed avremo

$$\text{I. } x+y+u = 1 \text{ donde}$$
$$(\text{F}) \; x = 1-y-u;$$

e d'altronde, poichè la somma de' prezzi delle tre frazioni costituenti la libbra esser debbe soldi 30, avrem pure

$$\text{II. } 50x+38y+24u = 30.$$

Per quanto poi si studino le condizioni del problema, non possiamo estricar fuori da esse, oltre le due esposte, altra equazione; e perciò il problema ha meno equazioni che incognite; e queste per conseguenza non potendo ricevere un valore determinato (§. 111) fanno sì che *indeterminato* si chiami il problema. Sostituendo infatti nella 2ª equazione ad x il suo valore trovato in (F), risulta

$$50-50y-50u+38y+24u = 30$$
$$\text{dondo (G) } y = {}^{(20-26u)}/_{12}.$$

Ora nell'equazione (G) il valore di y è indeterminato, poichè dipende da un'altra incognita, qual'è u, che contiene tra i suoi termini il 2º membro dell'equazione: e poichè a qualunque operazione si assoggettino le date equazioni, mezzo non troviamo da precisare il valore di alcuna incognita, conchiudiamo che il problema qual viene enunciato, senza l'aggiunta di qualche dato, non è suscettibile di soluzione. Rileviamo però facilmente che mentre in (F) la x dipende da y, e da u; mentre in (G) la y dipende dalla sola u, la u poi, quella incognita cioè che non è stata isolata, non dipende da alcun'altra, e può perciò ne' limiti prescritti dalle condizioni del problema, prendere quel valore che più ci piaccia. Quando dunque si dà alla u un valore arbitrario, si fissa cioè la quantità del caffè infimo che debbe esser contenuta in una libbra, resta tosto determinato il valore di y in (G): è quindi di x in (F); poichè col dare alla u un valore siamo venuti a togliere u dalle quantità incognite, e quindi abbiam reso a due sole incognite, e a due equazioni, ossia abbiam reso determinato quel problema che prima non lo era, perchè a due sole equazioni e a tre incognite. Ed è pur chiaro che per ogni diverso valore che noi accordiamo alla u, diverso è pure il valore che acquistano y ed x, cosicchè comunemente si dice « che quanti sono i diversi valori che sta in nostro arbitrio di accordare ad u, e tante diverse soluzioni acquista il problema indeterminato. » Questa espressione è però inesatta, poichè a rigore l'indicato problema non solo come appartenente alla classe di 1º grado non può aver più d'una soluzione (mentre ne hanno più d'una i problemi soltanto di grado maggiore, come vedremo) ma anzi finchè resta indeterminato, non può averne veruna. Quindi piuttosto che dire « poter un problema indeterminato ricever tante diverse soluzioni, quanti sono i diversi valori che diamo alla u » a tenore dell'esposto, ci esprimeremo più esattamente dicendo « che un problema indeterminato senza variazione alcuna dei dati che sono espressi nella enunciazione, passa ad esprimere tanti diversi particolari problemi determinati, per ciascun dei quali riceve un'unica soluzione diversa, quanti sono i diversi valori che accordare possiamo nel nostro caso alla u, ed in genere a quella, o a quelle quantità che l'*enunciazione incompleta* del problema indeterminato ci offre come incognite, non perchè tali debbano riguardarsi, mentre allora il problema non sarebbe risolvibile, ma perchè vengan prese come altrettanti dati, che il problema lascia (per lo più entro certi limiti) al nostro arbitrio. »

136. Il numero dei diversi valori che dar possiamo ai dati arbitrari, talvolta è *limitato*, talvolta è *indefinito*; o tale è nel nostro caso, sebbene le condizioni del problema lo circoscrivano in assai angusti confini. Infatti essi esigono che u sia fornita

dei tre seguenti indispensabili requisiti.

I. Fa di mestieri che u sia una *vera frazione*, perchè la equazion $x+y+u = 1$ esige che ogni incognita sia minore della unità:

II. Uopo è che u sia una *frazione non troppo grande*, ma tale che moltiplicata per 13 dia un prodotto minor di 10, affinchè nella equazione $y = {}^{(10-13u)}/_{6}$ la y nè si annulli, nè divenga negativa:

III. Conviene in pari tempo pur anche che u sia *una frazione non troppo piccola*, ma tale che sottraendo da 10 il suo prodotto per 13, si abbia un residuo non solo minore del denominatore 6 affinchè y abbia un valor minore dell'unità, ma tale ancora da conciliare ad x un valor frazionario così piccolo che unito ad u dia una somma minore di 1, sicchè possa anche x ricevere un qualche valore, affinchè si verifichi $x+y+u = 1$.

In seguito di ciò poichè u esser debbe una frazione, esplorando per es. fra i decimi, troviamo che per le richieste condizioni fa d'uopo che u abbia un valore nè minore di ${}^{6}/_{10}$, nè maggiore di ${}^{7}/_{10}$; e quantunque questi limiti sieno assai ristretti, ne possa u prendere un aumento maggiore di ${}^{1}/_{10}$, perchè non può nè sottostare a ${}^{6}/_{10}$, nè superar ${}^{7}/_{10}$, pure indefinito è il numero dei valori che può ricevere, siccome indefinito è il numero delle diverse quantità non maggiori di ${}^{1}/_{10}$, quali sono ${}^{1}/_{11}$; ${}^{1}/_{12}$; ${}^{1}/_{13}$; ${}^{1}/_{14}$;.... ec. all'infinito, che le si possono aggiungere. Se diamo ad u il valore per es. di ${}^{7}/_{10}$, sostituito questo valore in (G), abbiamo $y = {}^{3}/_{20}$, e quindi posti in (F) i valori di u ed y, abbiamo $x = {}^{3}/_{20}$; e questi tre valori verificano esattamente le condizioni del problema. Se diamo ad u il valore di ${}^{6}/_{10}$, otteniamo $y = {}^{11}/_{30}$, $x = {}^{1}/_{30}$: e questi valori soddisfano anche essi al quesito; ma se diamo ad u un valore in decimi o minor di *sei* o maggiore di *sette decimi*, nel 1° caso la somma di u, e di y supera l'unità, nel 2° la y acquista un valor negativo, risultati esclusi dalle condizioni del problema.

157. *Franchi 96 sono stati spesi in un viaggio da una comitiva di 36 tra uomini adulti, donne e fanciulli, essendo stato tassato ogni adulto per franchi 5, ogni donna per franchi 2, ogni fanciullo per franchi 1. Quanti eran gli adulti, le donne, i fanciulli?* »

Questo problema è indeterminato, perchè ci offre tre incognite, e due sole equazioni. Infatti date le seguenti denominazioni

Adulti	*N° x*	*Somma da essi sborsata 5x*
Donne	*N° y*	*Somma da esse sborsata 2y*
Fanciulli	*N° u*	*Somma da essi sborsata u*

si ha.......I. $x+y+u = 36$

II. $5x+2y+u = 96.$

Dalla 1ª si ottiene

$$(P)\ x = 36-y-u$$

e questo valore di x sostituito nella 2ª la converte in $5(36-y-u)+2y+u = 96$, donde.......(Q) $y = 28-{}^{4u}/_{3}$.

Or col dare ad u un valor arbitrario, che non si opponga alle condizioni del problema, otteniamo tosto da (Q) il valore di y, e da (P) il valore di x.

158. Affinchè poi u che esprime il numero dei fanciulli soddisfi alle condizioni del problema, conviene 1°, che sia positiva ed intera: 2°, che sia tale che in (Q) renda sempre positiva la y, e per tale oggetto devo essere minore di 21: 3°, che sia tale, che in (Q) renda sempre y intera, o per tale oggetto fa d'uopo sia divisibile per 3. Dunque la u non può ricevere altri valori che il 3, e tutti i suoi multipli sino al 18, e perciò soli 6 sono i problemi particolari determinati, in cui si converte l'enunciato, e che gli allievi potranno per esercizio sciogliere, confrontando i loro risultati col quadro seguente.

I.	Posto $u = 3$	, è $x = 9$	, $y = 24$
II.	Posto $u = 6$	, è $x = 10$	, $y = 20$
III.	Posto $u = 9$	, è $x = 11$	, $y = 16$
IV.	Posto $u = 12$	, è $x = 12$	, $y = 12$
V.	Posto $u = 15$	, è $x = 13$	, $y = 8$
VI.	Posto $u = 18$	, è $x = 14$	, $y = 4$
VII.	Posto $u = 21$	, è $x = 15$	, $y = 0$
VIII.	Posto $u = 24$	, è $x = 16$	, $y = -4$

Da questo quadro risulta, che sei sole sono le soluzioni appartenenti al problema, poichè per ammettere la settima, conviene escluder le donne, che nel problema son contemplate, e per ammettere l'ottava, convien riferirla a un quesito, che ha (è ben vero) relazione col già esposto, ma è da lui ben diverso in grazia del valor negativo che ci presenta la y. Infatti questa ottava soluzione ci mostra, che « *se si cer-*

cesse il numero degli uomini adulti, e delle donne esistenti in una comitiva di 36 individui, 24 dei quali sono fanciulli, posto che per la spesa di franchi 96 ogni fanciullo abbia contribuito un franco, ogni donna 2, e 5 ogni adulto » il problema sarebbe impossibile, perchè col darci $y = -4$, ci mostra essere impossibile che sia la comitiva di soli 36, o che le donne paghino pel viaggio. La soluzione negativa ci avverte infatti che il problema è possibile, rettificandone i dati, il che sappiamo si ottiene col cambiare i segni a tutti i termini contenenti la y nelle date equazioni.

Così facendo, la 1ª equazione diventa $x - y + u = 36$, donde segue che $x + u = 36 + y$, cioè il numero degli adulti e fanciulli è uguale a 36 accresciuto del numero delle donne. Cambiando poi il segno al coefficiente della y nella 2ª equazione, essa diventa $5x - 2y + u = 96$; e poichè in questa equazione y è un moltiplicatore (essendo giusta le condizioni ripetuto il 2 franchi per quanto indica y) perciò il valore negativo di y che ha prodotto il $-2y$ c' indica quante volte va non aggiunta, ma sottratta la quantità 2 che per y è moltiplicata; e ci mostra che a franchi 96 è uguale il denaro sborsato dagli adulti e fanciulli dopo essere stato diminuito del prodotto di scudi 2 moltiplicato pel numero delle donne; ossia dire possiamo (siccome dalla ora esposta equazione risulta pure $5x + u = 96 + 2y$) che la somma spesa dagli adulti e fanciulli è uguale a franchi 96 accresciuta di franchi 2 per ogni donna. Quindi nel nostro esempio il cambiamento del segno nei termini affetti dalla y ci ha recato a tre importanti modificazioni nell' enunciato del problema, l' *una* risguardante il numero dei viaggiatori giacchè il numero degli adulti e dei fanciulli non è più 36, ma supera il 36 per quanto è il numero delle donne, l' *altra* risguardante la condizione delle donne, facendoci conoscere, che esse p. e. per essere addette alla cura dei fanciulli, percepiscono quella somma che nell' antecedente problema si suppone che sborsassero; la *terza* risguardante la total somma spesa, che non è come nell' antecedente di soli franchi 96, ma di franchi 96 più il salario delle fantesche.

Ed ecco dietro tutto ciò che abbiamo notato come potrebbe modificarsi il problema nell' ottava soluzione, la quale seco porta necessariamente in virtù del valore negativo di y un cambiamento di condizioni. « *Le spese di viaggio ascendenti a franchi 96, e del salario dato alle fantesche a ragione di franchi 2 l' una, son ripartite fra gli uomini adulti a ragione di franchi 5, e tra i 24 fanciulli a ragione di franchi 1 per ciascheduno, formando gli adulti e i fanciulli insieme un numero che supera il 36 per quanto è il numero delle donne. Quanti sono gli adulti, e le fantesche?*

159. Il problema stesso (§. 157) che è indeterminato, diverrebbe *determinato*, se si aggiungesse un' altra condizione, per es. che gli adulti e i fanciulli insieme formino un numero eguale alla metà delle donne, cioè

$$(\text{R})\quad x + u = y/_2,$$

mentre in tal caso il numero delle equazioni oguaglia quello delle incognite, e perciò sostituito anche in quest' ultima ad x il suo valore trovato in (P), la (R) si converte in $36 - y - u + u = y/_2$, donde $y = 24$. Sostituendo il valore di y (numero or trovato) in (Q), e quindi isolando la u, otteniamo $u = 3$; e ponendo in (P) i valori di y e u, otteniamo $x = 9$.

160. Se al problema stesso (§. 157) oltre la condizione ora annessavi, soggiungessimo « che il numero dei fanciulli è $^4/_{11}$ della somma degli adulti e delle donne » che cioè $u = {}^{x+y}/_{11}$, il problema è *più che determinato*, perchè il numero delle equazioni supera allora quello delle incognite; od in tal caso con tre qualunque delle quattro equazioni si giunge ad ottener sempre il medesimo intento, come possono gli studenti per esercizio verificare.

161. Lo stesso problema (§ 157) poi invece di divenire più che determinato, diverrebbe *impossibile*, se la quarta condizione fosse incompatibile con qualcuna delle altre: per es. se si volesse « che il triplo degli adulti più il numero dei fanciulli eguagliasse il numero delle donne » cioè $3x + u = y$; perchè essendovi l' altra equazione $x + u = y/_2$, donde $2x + 2u = y$; dovrebbe verificarsi (paragonando insieme i valori di y qui ottenuti) che $3x + u = 2x + 2u$, donde $x = u$; il che è in contraddizione coi risultati che si ottengono sciogliendo il problema per mezzo delle prime tre equazioni, mentre si è allora ottenuto $x = 9$, e $u = 3$ (§. 159).

Interessanti nozioni intorno ai problemi determinati, piu' che determinati, indeterminati, semi-determinati e impossibili.

162. Diverse denominazioni acquistano i problemi secondo il numero non solo, ma secondo ancora la qualità delle equazioni cho si possono trarre dal loro enunciato; ed è perciò che per prendere di essi una idea, giova prima d'ogni altro ben conoscere cosa s'intende per equazioni vere ed apparenti, per equazioni indipendenti e derivate e per equazioni complete ed incomplete. Una eguaglianza dicesi equazione vera quando sia fra termini parte noti e parte incogniti, e dicesi apparente quando essa ha luogo fra termini tutti ignoti.

E dicesi equazione *apparente* un'eguaglianza in cui non vi sono che termini ignoti, perchè a primo aspetto *apparisce* condurci alla determinazione dell'ignoto, ma effettivamente non ci reca che ad una inane identità. Ed in vero quando l'eguaglianza è fra quantità tutte ignote, ciò addimostra cho nel problema o non esistono quantità note isolate, o si elidono se vi esistono, cosicchè nell'equazione ridotta manca il termine noto a della formola generale.

E poichè quando le equazioni sono a più incognite, tutti i metodi di eliminazione ci portano finalmente ad una equazione ad una sola incognita x, è chiaro cho quando a questa equazione ad una ignota sola siamo giunti, se mancano termini noti, la somma dei coefficienti positivi della x debbe essere uguale alla somma dei negativi; e perciò (qualunque essa sia) un'oguaglianza fra soli termini affetti dalla x, viene espressa dalla formola

$$ex+a = ex+a,$$

donde risulta

$$x = {}^{a-a}/_{c-c} = {}^{0}/_{0},$$

ed ancho

$$cx = ex \text{ e finalmente } x = x$$

e tanto $x = {}^{0}/_{0}$ quanto $x = x$ hanno l'*apparenza* di una equaziono finale, ma non già la *sostanza*; poichò in voce di darci il valore della x come fanno le equazioni finali, non ci mostrano che un'inane identità. *Sono dunque equazioni apparenti quelle, che aggirandosi fra tutti termini ignoti danno* $x = {}^{0}/_{0}$.

163. Una equazione dicesi *indipendente* quando essa non sia il risultato di modificazione alcuna fatta subire ad un'altra equazione: dicesi *derivata*, quando deriva da un'altra in grazia di una moltiplicazione o divisione di tutti i suoi termini.

164. Una equazione dicesi completa, quando contiene le incognite tutte cho il problema ci offre: incompleta quando solo alcune e non tutte. Ciò dichiarato, facile è l'intelligenza delle seguenti definizioni.

165. **Problema determinato** *dicesi quello, le cui condizioni dandoci tante vere indipendenti e complete equazioni, quante sono le incognite, ci offrono il modo di determinare il valore di ciascheduna.*

Quindi se il problema è ad una incognita sola, esso è determinato tutte le volte cho le sue condizioni ci dieno una vera equazione. Tale p. es. è il problema del Pittore (§. 136).

166. **Problema più che determinato** *dicesi quello, le cui condizioni ci offrono un numero di vere, indipendenti e complete equazioni maggiore del numero delle incognite.*

In tal caso per la soluzione del problema fra le date equazioni, basta sciogliere a nostro arbitrio tante, quante sono le incognite; e giova poi per maggiore brevità di calcolo quelle prendere di mira che sono le meno complicate. Le altre sono superflue. Tale è il problema delle spese incontrate per un viaggio (§ 160).

Se il problema è ad un incognita sola, sarà più che determinato quando ci offra almeno due equazioni, da ognuna delle quali ad arbitrio possa trarsi il valore identico dell'unica incognita. Tale è il problema dell'età della madre e della figlia al (§.139).

167. **Problema indeterminato** *dicesi quello, le cui condizioni ci recano ad un numero di vere indipendenti e complete equazioni minori del numero delle incognite in guisa che non ci è dato giungere alla determinazione di tutte senza qualche arbitraria supposizione.*

Egli è perciò che un problema può riuscire indeterminato anche quando il numero delle equazioni cui ci recano le sue condizioni sia maggiore del numero delle incognite stesse, se alcune di queste equa-

zioni sieno incomplete, sicchè qualche ignota rimanga da non poter essere coi noti metodi esaminata.

I problemi indeterminati sono risolvibili quando ad una od a più incognite si dia un valore arbitrario. Or questo arbitrario valore, quantunque entro certi limiti circoscritto dalle condizioni, può talvolta essere suscettibile di indefinite variazioni, sicchè in grazia di esso può il problema indeterminato senz' alterazione dei suoi dati convertirsi in un *numero indefinito* di problemi determinati, come accade nel quesito del caffè (§. 155) o come accadrebbe nella ricerca di due numeri qualunque interi, frazionari, positivi, negativi, la cui somma in senso algebrico fosse 8. Qualch' altra volta può darsi che tali sieno le condizioni, che a soddisfarle valga solo un *numero limitato* di valori arbitrari, che per es. è 6 nel problema de' viaggiatori (§. 158) che nella ricerca di due numeri *positivi ed interi*, la cui somma fosse 8, sarebbo 7, come il seguente specchio ci offre.

Supposizioni possibili	$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
Soluzioni corrispondenti	$y = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$

e che in qualche altra ricerca può anche essere 1 (come accadrebbe se la somma di 137 paoli formar si volesse con mezzi scudi e zecchini, cioè con monete da 5, e da 22 paoli), e anche potrebbe essere *zero*, attesa la incompatibilità delle condizioni, come nel caso che colle stesse monete far si volesse una somma di paoli 45. Quindi *diciamo* INDETERMINATI IN TUTTA ESTENSIONE *que' problemi, nei quali le incognite possono ricevere un numero indefinito di valori diversi.* SEMI-DETERMINATI *poi quando questo numero è limitato.*

168. Dovendo i problemi per essere indeterminati avere un numero di equazioni minore del numero delle incognite, parrebbe che problemi di 1° grado a un' incognita sola indeterminati non potessero darsi, non potendo darsi un numero di equazioni minore del numero delle incognite, quando l' incognita è una sola; eppure vi sono. Può infatti dirsi essere il numero delle equazioni minore del numero delle incognite anche quando si abbia una incognita sola e niuna equazione. E niuna equazione dir possiamo che hanno que' problemi i quali ci offrono una uguaglianza fra termini tutti incogniti; poichè a tenore della definizione (§. 108) non si dà equazione se fra gli incogniti non esista ancora qualche termine noto. Non ha dunque vera equazione quel problema che ha tutti i suoi termini affetti dall' incognita; e perciò può dirsi che sebbene abbia una incognita sola, pure ha più incognite che equazioni, e quindi merita per questo titolo di essere chiamato problema indeterminato. A maggior diritto poi questo nome gli compete se si riflette, che un problema la cui uguaglianza si aggiri fra termini tutti ignoti appartiene al V° caso (§. 133) in cui $x = {}^0/_0$, ed ha un valore indeterminato. Ed è indeterminato in senso sì lato, che qualunque valore ci piaccia accordargli senza limitazione veruna, soddisfa alle condizioni, poichè tali in ultima analisi queste esser deggiono da altro non esigere se non che sia $x = x$; deo cioè la cosa che cerchiamo non ad altra condizione soddisfare che a quella di essere uguale a sè medesima, caratteristica che è propria di qualunque quantità.

169. Or questa inane identità $x = x$, appunto perchè altro non ci dice se non che una cosa è uguale a sè stessa, parrebbe che non potesse aver nulla che fare con la espressione algebrica di un problema, ed esserne il finale risultato. Ben però finale risultato ne addiviene, quando siasi dato vita al problema, nascondendo quella nuda inane identità col vestirla di forme novelle, col far subire cioè ad uno o a ciascuno dei di loi membri delle modificazioni che ne alterino l' aspetto senza alterarne il valore. Così per es. moltiplicando e dividendo per 6 il solo 2° membro della $x = x$, abbiamo in vece $x = {}^{6x}/_6$. Per meglio nascondere l' identità di questi due membri, spezzando il numeratore in più parti, scriver possiamo per esempio $x = {}^{x}/_6 + {}^{2x}/_6 + {}^{3x}/_6$, e riducendo le frazioni a menomi termini, ottenere $x = {}^{x}/_6 + {}^{x}/_3 + {}^{x}/_2$; ed ecco l' inane identità $x = x$ trasformata in una equazione apparente, che è la traduzione algebrica di questo problema « *Si cerca un numero che sia uguale alla somma del suo sesto, terzo e metà* ». Ed è precisamente un caso particolare di questo problema generico quello che è esposto al (§. 133).

Siccome però ogni numero soddisfa alle condizioni richieste da questi così detti problemi indeterminati ad una incognita, a più ragione il loro enunciato merita di essere convertito in teorema; e così piutto-

sto che dire « *Si cerca un numero che sia eguale alla somma del suo sesto, terzo e metà* » siccome ci siamo assicurati non esservi numero, in cui tal proprietà non si verifichi, sarà più esatto dire in vece « *Vuolsi dimostrare che qualunque numero è uguale alla somma del suo sesto, terzo e metà* ».

170. Dar termine poi a queste elementari osservazioni su i *problemi indeterminati* non ne piace, senza far prima sentire la necessità di bene in essi distinguere le equazioni *vere* dalle *apparenti*, e le *indipendenti* dalle *derivate*, poichè un problema può apparir determinato, e anche più che determinato, e non esserlo, allorchè per vera e indipendente si prenda una qualche sua equazione *apparente* o *derivata*. Infatti sia per es. un problema a due incognite, e a due equazioni. Se una di queste è *apparente*, è cioè un' *inane identità trasformata* (e la è tutte le volte che termini noti o non vi sono, o si elidono) come per es. $x+2y = y/_2+x/_2+2x/_5+x/_{10}+3y/_2$, da questa ricavasi solo o $x = x$, ovvero $y = y$, espressioni, che a nulla valgono, e resta perciò il problema indeterminato. Se poi un' equazione è dipendente dall' altra, è cioè *derivata* o per moltiplicazione o divisione, come per es. se le due equazioni fossero $4x-12y = 18$; e $2x-6y = 9$, delle quali la 1ª non è che la 2ª moltiplicata per 2, chiaro risulta dalle operazioni dirette ad isolare la x, che il valor di y ottenuto nell' una, e sostituito nell' altra, dà all' equazione tal forma, che necessariamente ci reca ad $x = x$, equazione finale inservibile al discoprimento delle incognite, e perciò anche in questo 2° caso indeterminato resta il problema; cosicchè conchiudiamo, che i rapporti di eguaglianza *derivati* o *da una inane identità d' incognite, o da un' altra equazione*, nulla influiscono per la soluzione de' problemi, perchè o immediatamente o mediatamente ci recano ad $x = x$, ovvero ad $x = 0/_0$.

171. **Problema impossibile** *dicesi quello, le di cui incognite non solo non hanno (siccome accade nei problemi indeterminati) ma nemmeno possono ricevere alcun valore in seguito di qualche supposizione, perchè inconciliabili sono o* I° *le sole sue* CONDIZIONI CONCRETE, *o* II° *le* CONDIZIONI ASTRATTE *pur anche delle equazioni nella quale viene tradotto il suo enunciato*.

Nel I° caso la *impossibilità* può dirsi *relativa*, ed accade quando le equazioni dateci dal problema, risolute ci recano a valori frazionarii nel mentre stesso che le particolari condizioni del problema stesso gli esigono interi, come nel quesito del pescatore (§. 137) e del numero dei commensali (§. 154) o ci danno valori interi quando le condizioni gli esigono frazionari, come nel problema (§. 156) del caffè, che esige $x+y+u = 1$. E chiamiamo *relativa* questa impossibilità, perchè gli stessi valori, o frazionari, o interi, che sono impossibili pel dato problema, non solo soddisfano per lo appunto alle condizioni astratte ossia alle condizioni puramente numeriche dell' equazione che vien da essi convertita in vera identità, ma anche alle condizioni concrete di altri problemi talvolta di diversa indole e senza relazione alcuna col proposto, che pur vengono algebricamente espressi dalla stessa equazione.

Nel II° caso poi l'impossibilità può dirsi *assoluta*, perchè intrinseca ed inerente alla stessa natura astratta delle equazioni, e dipende o I° dalla *assurdità* o 2° dalla *incompatibilità* delle condizioni, cioè o I° perchè è impossibile una qualche condizione del problema; o 2° perchè di condizioni tutte possibili separatamente considerate è impossibile la coesistenza. La 1ª sorta d' impossibilità assoluta può rinvenirsi sì nei problemi ad una, che a più incognite, quando essi ci offrono un' equazione assurda, perchè si verifica in essi o il II°, o il III°, o il IV° caso contemplato ai (§. 126, 129, 131). La 2ª sorta d' impossibilità assoluta fondata sulla incompatibilità delle condizioni, non puo aver luogo che nei problemi che ci offrono più equazioni, o sieno questi a più incognite, o sieno questi più che determinati ad una incognita sola; e in tal caso ciascuna equazione del problema impossibile, isolatamente considerata non offre assurdo alcuno. Così nel problema de' viaggiatori (§. 157) non v' è difficoltà alcuna ad ammettere la quarta condizione, *che il triplo degli uomini adulti più il numero de' fanciulli eguagli il numero delle donne;* niuna difficoltà pure ad ammettere contemporaneamente questa quarta condizione e la terza, la quale ci esprime *che il numero degli adulti e dei fanciulli insieme è la metà del numero delle donne* (§. 159) dalle quali due condizioni risulta che $x = u$, ossia che il numero degli adulti è uguale a quello dei fanciulli (§. 161):

niuna difficoltà ad ammettere le prime tre condizioni nell' enunciato esposte, dalle quali risulta essere $x = 9$, e $u = 3$ (§. 159): ma allora solo l' impossibile nasce, quando si vuole la coesistenza della 4^a condizione colle altre tutte; poichè allora pretendiamo l' impossibile che x sia uguale ad u, ciò esigendolo la 3^a, e 4^a condizione, e sia al tempo stesso il suo triplo, siccome lo esigono le tre prime. In simil guisa nel problema dell' età della madre e della figlia (§. 138) rende il problema impossibile la condizione aggiuntavi al (§. 140)

Epilogo

della Sezione IV. Teoria dei problemi ed equazioni di I. grado.

Nozioni preliminari generiche. I problemi distinguonsi in aritmetici e algebrici. Dalla *equazione* in cui si è tradotto l' enunciato si passa alla *equazione finale*, che ci dà il valore della incognita. Questo sostituito in ogni termine della prima equazione in cui esiste, la converte in *equivalenza* ed *identità*; e così siamo assicurati di avere ben operato. Nei problemi algebrici inoltre va distinta dalla parte pratica la parte teorica, la quale abbraccia la traduzione dell' enunciato in equazione, e la risoluzione delle equazioni, che vengono classificate a tenore e del numero delle incognite e del loro grado (§. 105 al 113).

Traduzione dei problemi in equazione. Questa esige che ben si esaminino le condizioni del problema le quali debbono tradursi in letterale linguaggio, appena che siasi bene afferrato il rapporto d' eguaglianza, il quale o esplicitamente o implicitamente nascosto, esiste fra i dati del problema stesso (§. 114 e 115).

Risoluzione delle equazioni di primo grado a un' incognita. Questa riposa su i due seguenti assiomi. *I membri d' una equazione restano eguali, se ad ambi si aggiunga o tolga la stessa quantità*; ond' è che la verità dell' eguaglianza non si altera I. se interessandoci di togliere uno, o due, o tutti i termini di un membro, si pongano nell' altro col segno cambiato, II. se si cambia segno a tutti i termini del primo e secondo membro, III. se essendo una equazione a zero, si cambi il segno a tutti i termini del membro sinistro. *I membri d' un' equazione rimangono eguali, se ambi si moltiplichino o si dividano per una medesima quantità*; ond' è che la verità dell' eguaglianza sussiste, se I. il coefficiente o il divisore di un membro, togliendolo da questo, si ponga come divisore o coefficiente nell' altro, II. se, essendo ridotta a zero un' equazione, tutti i termini del sinistro membro vengano moltiplicati o divisi per una medesima quantità. Profittando di queste regole ogni equazione di primo grado a un' incognita prende la forma di $cx+a = 0$ donde $x = {}^{-a}/_{c}$ (§. 116 al 122).

Osservazioni sulle equazioni di primo grado a un' incognita. L' analisi delle equazioni di primo grado ad una incognita ci fa conoscere potersi dare 5 distinti casi, che cioè I. abbiano c ed a segni diversi; e *positiva* allora è la x. II. che c ed a abbiano lo stesso segno; e allora la x è *negativa*: III. $a = 0$; e allora anche cx e quindi $x = 0$. IV. $c = 0$; e allora $x \times 0 = a$, assurdo. V. $a = 0$, $c = 0$; e allora x ha un valore indeterminato $= {}^{0}/_{0}$ (§. 123 al 140).

Risoluzione delle equazioni di primo grado a piu' incognite. Questa esige che le equazioni sieno tante, quante le incognite, e si può ottenere l' intento I. col metodo delle nuove equazioni formate con le diverse espressioni dell' incognita stessa: II. col metodo delle sostituzioni: III. col metodo delle sottrazioni di una equazione dall' altra, e tutti e tre sono metodi di eliminazione per i quali da equazioni a molte, giungiamo ad una equazione ad una incognita sola. *Si è a questo proposito data l' idea dei problemi indeterminati* coi problemi del caffè e dei viaggiatori (§. 141 al 161).

Nozioni intorno alle diverse qualita' dei problemi. I Problemi sì ad una che a più incognite possono essere o *determinati* o *più che determinati* o *indeterminati*, secondo che il numero delle vere, indipendenti e complete equazioni eguaglia, o supera o è minore del numero delle incognite: e gli indeterminati poi chiamansi *semi-determinati*, quando non indefinito, ma limitato è il numero dei valori arbitrari che le incognite sono suscettibili di ricevere: possono essere anche *impossibili* ed è a distinguersi l' *impossibilità relativa* inerente alle condizioni concrete, la qual permette che la stessa equazione soddisfi a problemi d' altra natura, e l' *impossibilità assoluta* che dipende o dall' assurdità intrinseca a qualche condizione anche in astratto considerata, o dalla loro incompatibilità (§ 162 al 171).

SEZIONE. V.

Formazione delle potenze ed estrazione delle radici

172. Se una qualsiasi quantità o venga presa una volta, o una o più volte di seguito venga moltiplicata per sè medesima, si è già veduto (§. 37 e 38), che il prodotto che ne risulta è *potenza*, ed è *radice* la quantità che lo genera, entrambe del grado espresso dal numero delle volte che la grandezza genitrice è ripetuta come fattore nel prodotto; cosicchè appellansi del grado 1°, 2°, 3°....., *ennesimo*, se la radice è scritta come fattore 1, 2, 3.... *n* volte, o ciò che è lo stesso, se la radice o non è mai moltiplicata per sè, ma invece per l' unità, o è moltiplicata una volta, o due volte, o $n-1$ volte per sè medesima. Ciò posto una stessa quantità, qualunque ella sia, può riguardarsi e come *radice* e come *potenza* di qualunque grado ci piaccia: come *radice*, purchè si riferisca ad una quantità in cui essa vi sia ripetuta in qualità di fattore per un numero di volte eguale al numero indicante il voluto grado della radice: come *potenza*, purchè si concepisca come prodotta da una quantità generatrice ripetuta in qualità di fattore per un numero di volte eguale al voluto grado della potenza (a).

Che una stessa quantità possa considerarsi come radice 1ª, o 2ª, o 3ª, ec. eccone un esempio. Lo stesso 3 è *radice prima di* 3, perchè il 3 può reputarsi prodotto da 3 scritto una volta come fattore, cioè non moltiplicato mai per se stesso, ma invece per l' unità. Lo stesso 3 è *radice seconda di* 9, perchè 9 può reputarsi prodotto da 3×3: lo stesso 3 è *radice terza* di 27, perchè $27=3\times3\times3$, ec. Così la stessa *c* è *radice prima di c*, è *radice seconda* di c^2, è *radice terza* di c^3, ec. per le medesime ragioni. *Che una medesima quantità possa considerarsi come potenza* o 1ª, o 2ª o 3ª, ec. eccone un esempio. Lo stesso 256 è *potenza prima* di 256, perchè può riguardarsi prodotto da 256×1: è per es. *potenza seconda* di 16, perchè può riguardarsi come formato da $(16)^2$: è per es. *potenza quarta* di 4, perchè può riguardarsi prodotto da $(4)^4$: è *potenza ottava* di 2, perchè può riguardarsi formato da $(2)^8$. Così la stessa a^4 per le medesime ragioni è *potenza prima* di a^4, è *seconda* di a^2, potendo riguardarsi prodotta da $a^2\times a^2$, *quarta potenza* di *a*, potendosi riguardar come prodotta da $(a)^4$.

Che una quantità stessa possa considerarsi e come radice e come potenza, eccone un esempio. Lo stesso 8, o g^3 è *radice terza* quando si riferisce a 512, o a g^9, poichè $512=8\times8\times8$; e $g^9=g^3\times g^3\times g^3$. Lo stesso 8, o g^3 è *potenza terza* se si riferisca a 2, o a *g* perchè può riguardarsi come formato da $2\times2\times2$, ovvero da $g\times g\times g$

173. E dalle esposte nozioni rileviamo I. che la proprietà di esser potenza, o radice, e di esserlo d' un grado piuttosto che d' un altro, non è intrinseca alla quantità che si prende di mira, ma dipende dalla quantità cui la riferiamo. II. che ogni quantità può riguardarsi e come potenza 1ª, e come radice 1ª di sè, come potenza, riguardandola qual prodotto, come radice, riguardandola quale fattore, allorchè per una abusiva analogia si consideri anche l' unità per moltiplicatore, sicchè sotto un diverso concetto *radice prima*, e *potenza prima*, esprimono la cosa stessa: III. che 1 esprime qualunque potenza, o qualunque radice di 1, perchè $1\times1\times1\times....=1$; mentre le potenze diverse, o le di-

(a) Abbiamo detto che una potenza è il prodotto di una quantità moltiplicata una o più volte per *sè medesima*. Convien però badar bene di non prendere la parola « *medesima* » a rigor di termine nello stretto senso di *identica*; giacchè se nella elevazione a potenza i fattori debbono convenire nel quantitativo, e nella corrispondenza del segno, d' altronde il moltiplicando $+a$ è tanto diverso dal $+a$ moltiplicatore, ed il moltiplicando $-a$ dal $-a$ moltiplicatore nelle cose che rappresentano, quanto lo è un numero indicante *oggetti* (siccom' è il primo) da un numero indicante *ripetizione*, come è il secondo, il quale perciò se è affetto dal — indica quante volte va tolto il moltiplicando (§. 25). Quindi la seconda potenza di scudi 3 non è già *la somma di scudi* 3 *moltiplicata per scudi* 3, espressione assurda; ma è la somma di scudi 3 ripetuta 3 volte, giacchè lo stesso 3 indica *scudi* nel moltiplicando, e *volte* nel moltiplicatore: tanto è falso che a stretto rigor di termine possa dirsi che l' elevazione a seconda potenza sia la moltiplicazione d' una quantità per sè stessa.

verse radici di un numero stesso, qualunque egli sia, è ben chiaro che esser deggiono quantità diverse, che possono ignorarsi, e costituir l'oggetto delle nostre ricerche. Quindi è che

Elevazione a potenza *dicesi quell' operazione sintetica per di cui mezzo data una quantità qualunque, che si considera come radice di un grado ennesimo, si trova la sua corrispondente ignota potenza.*

Estrazione di radice o *risoluzione di potenza poi è quella operazione analitica direttamente contraria all' elevazione, per di cui mezzo data una quantità qualunque che si considera come potenza ennesima, giungiamo a trarvi fuori quel fattore incognito che moltiplicato n—1 volte di seguito per sè la produce.*

174. Il grado della potenza cui vuole innalzarsi una quantità (la quale in tal caso viene ad esser considerata per radice) è indicato da un esponente posto in alto a destra di una linea orizzontale che cuopre, o di una parentesi (e questo è il mezzo il più esatto) che racchiude la quantità. Così $(a)^5$, $(a^2)^5$, $(-m^2p^3)^5$, $(^a/_c)^5$, $(m^2-c)^5$ sono espressioni, che indicano doversi il monomio semplice a il potenziale a^2, il prodotto $-m^2p^3$, il frazionario $^a/_c$ e il binomio (m^2-c) innalzarsi *alla potenza quinta*, ossia moltiplicarsi quattro volte di seguito per sè stesso. *La quantità dunque che stà chiusa tra parentesi è sempre una radice di quel grado che viene espresso dall' esponente che sta fuori della parentesi rispetto a quella potenza che dal detto esponente è indicata.*

175. Il grado della radice che vogliamo estrarre da una data quantità (la quale in tal caso viene ad esser considerata per potenza) è indicato da un numero detto *indice* o *esponente* della radice che si colloca nell' apertura del segno $\sqrt{}$, detto *radicale*, il quale si pone innanzi alla quantità considerata come potenza d' un grado corrispondente a quella radice che vogliamo estrarvi. Per convenzione però quando l'esponente del radicale è il 2, l' esponente non si segna, e non si enuncia.

Così $\sqrt[3]{e}$ si enuncia *radice terza* di e, e significa, che considerata e come terza potenza, si vuole da essa trarre la radice che l' ha prodotta. Così $\sqrt{a^6}$ si enunzia *radice seconda* o anche semplicemente *radice di* a^6, e significa che considerata a^6 come potenza del grado espresso dal radicale sotto cui è collocata (e non già potenza di quel grado che è indicato dal suo esponente 6) noi cerchiamo la radice seconda, o quella quantità che moltiplicata una volta per sè, l'ha prodotta, e che vedremo esser a^3; ond' è che l' *indice della radice è anche l' indice del grado della potenza cognita, esistente sotto il segno radicale*, qualunque sia l' esponente della quantità che per la data potenza prendiamo. Se poi la quantità da cui vuolsi estrarre la radice è complessa, o si prolunga la destra gamba del segno radicale orizzontalmente piegata al di sopra di tutti i termini del polinomio, o dopo il segno radicale si chiude tra parentesi (e questo è il mezzo più esatto) la quantità di cui vuolsi estrarre la radice, come per es. « $\sqrt{(ac^2+m-n)}$ ». *La quantità sotto il segno radicale è dunque sempre potenza del grado espresso dall' indice della radice.*

176. Dall' esposto chiare risultano le seguenti verità.

E I. *Sopprimere l' esponente d' una quantità è un estrarre la radice indicata dall' esponente soppresso*; e quindi

dato $c^n = a$, ne segue $c = \sqrt[n]{a}$

II. *Togliere il segno radicale ad una quantità, egli è un elevarla alla potenza indicata dal grado del radicale soppresso*; e

quindi dato $\sqrt[n]{c} = a$, ne segue $c = a^n$.

III. Dal valor convenzionale dei simboli chiaro pure risulta, che

$$\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt[3]{e}\,.\,\sqrt[3]{e}\,.\,\sqrt[3]{e} = (\sqrt[3]{e})^3 = e$$

$$\sqrt{(a^2+m)}\,.\,\sqrt{(a^2+m)} = \left(\sqrt{(a^2+m)}\right)^2 = a^2+m$$

$$(\sqrt[n]{e})^n = e.$$

Il simbolo $\sqrt[n]{e}$ ci significa che noi riguardiamo e come potenza ennesima, e ne vogliamo la rispettiva radice; e quando usiamo il simbolo $(\sqrt[n]{c})^n$ è ben chiaro essere esso uguale a e; poichè ci indica, che noi vogliamo la potenza ennesima di quella radice, la cui potenza ennesima è e. *Ogni quantità in somma è la potenza ennesima della sua ennesima radice.*

IV. Risulta pure dal valore convenzionale dei segni che

$$\sqrt{a^2} = a,\ \sqrt[3]{a^3} = a,\ \sqrt[4]{a^4} = a$$

$$\sqrt[5]{(a^2+m)^5} = a^2+m,\ \sqrt[n]{c^n} = c$$

Ogni quantità in somma è la *radice ennesima della sua ennesima potenza*.

Premesso queste nozioni, passiamo ad esporre il trattato della sintesi e analisi de'le potenze che dividiamo in 4 parti.

La I^a è dedicata alla formazione delle potenze monomie.

La II^a alla risoluzione loro.

La III^a è dedicata alla formazione dello potenze polinomie.

La IV^a alla loro risoluzione.

I. Formazione delle potenze dei Monomii

177. Un monomio, qualunque egli sia, quando ne' casi particolari si sostituiscono alle lettere i loro valori aritmetici, diventa un numero; ed un numero viene elevato ad una potenza qualsiasi, moltiplicandolo per sè tante volte meno 1, quante unità sono nell' esponente della richiesta potenza (§. 172). Così p. e. $5^4 = 5.5.5.5 = 625$; e così si sono ottenute le successive potenze di tutti i numeri semplici che dalla prima sino alla nona la seguente tavola ci offre.

TAVOLA

Di tutte le successive potenze dei numeri semplici dalla prima alla nona.

1.^{a}	2.^{a}	3.^{a}	4.^{a}	5.^{a}	6.^{a}	7.^{a}	8.^{a}	9.^{a}
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	825543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Per ottener poi con più sollecitudine i risultati, quando trattisi di potenze molto elevate di un dato numero, piuttosto che successivamento passare dal quadrato al cubo, alla 4^a, 5^a, ec. potenza, basta moltiplicare tra loro quelle potenze del dato numero, la somma dei gradi delle quali è uguale al grado della voluta potenza. Così se vogliamo 3^9, basta moltiplicare due volte di seguito per sè il 27 che è 3^3. Ed in vero il risultato 19683 che otteniamo è $3^3\times3^3\times3^3 = 3^9$. E poichè per es. $5^4.5^4.5^2 = 5^{4+4+2} = 5^{10}$, ne segue che (essendo $5^4 = 625$ e $5^2 = 25$) si abbia $5^{10} = 625\times625\times25 = 9765625$.

Formazione delle potenze dei monomii algebrici interi e frazionarii.

178. Dal modo con cui giungiamo a formare per mezzo della ripetuta moltiplicazione le richiesto potenze di un monomio intero qualunque, dedurre possiamo un metodo pratico compendioso per ottenerle, senza passare ogni volta per la tediosa trafila delle successive moltiplicazioni.

E primieramente rapporto ai segni, poichè $+a\times+a = +a^2$; $+a^2\times+a = +a^3$, $+a^3\times+a = +a^4$; ec. ossia poichè una quantità positiva qualsiasi moltiplicata per sè un numero qualunque di volte dà sempre un prodotto positivo, può conchiudersi che *qualsiasi potenza di qualsivoglia quantità positiva è sempre affetta dal segno* $+$. Poichè $-a\times-a = +a^2$; $+a^2\times-a = -a^3$; $-a^3\times-a = +a^4$; $+a^4\times-a = -a^5$, ec. ossia poichè una stessa quantità negativa, se è presa per fattore un dato numero *pari* di volte, dà

sempre un prodotto positivo, e dà un prodotto negativo se è presa per fattore un numero *dispari* di volte, il che accade perchè il prodotto dell' ultima moltiplicazione risulta sempre di fattori affetti ambedue dal segno — nel 1°, e da' segni contrari nel 2° caso, si può conchiudere che *le potenze pari di una quantità negativa sono sempre affette dal segno* + *: dal segno — le potenze dispari*. Laonde le *potenze pari hanno tutte il segno* + *o la radice sia positiva* , *o sia negativa : le dispari hanno tutte il segno stesso della loro radice*.

Per rapporto poi ai COEFFICIENTI ed agli ESPONENTI, da cui sono affette le lettere, cominciamo dall' osservare che la radice monomia da elevarsi a potenza può I. esser *semplice*, come a; e poichè $(a)^2 = a\times a = a^2$; $(a)^3 = a\times a\times a = a^3$ ec.; avremo in genere $(a)^n = a^n$. Può II. essere affetta da un esponente, può essere cioè potenziale semplice, come a^5; e in tal caso poichè $(a^5)^2 = a^5\times a^5 = a^{5+5} = a^{5\cdot2}$ (§. 57); poichè $(a^5)^3 = a^5\times a^5\times a^5 = a^{5+5+5} = a^{5\cdot3}$ ec, avremo in genere $(a^r)^n = a^{rn}$. Può III. esser composta di più lettere, ossia prodotta da più fattori come a^4cm^3; e in tal caso poichè $(a^4cm^3)^2 = a^4cm^3\times a^4cm^3 = a^4a^4ccm^3m^3 = a^{4+4}c^{1+1}m^{3+3} = a^{4\cdot2}c^{1\cdot2}m^{3\cdot2}$; poichè $(a^4cm^3)^3 = a^4cm^3\times a^4cm^3\times a^4cm^3 = a^4a^4a^4cccm^3m^3m^3 = a^{4\cdot3}c^3m^{3\cdot3}$ ec., avremo in genere $(a^mc^r)^n = a^{mn}c^{rn}$. Può IV. essere affetta da coefficiente, come $7a^4c$; e in tal caso poichè $(7a^4c)^2 = 7a^4c\times 7a^4c = 7.7a^4a^4cc = 7^2a^{4\cdot2}c^2$; poichè anche $(7a^4c)^3 = 7a^4c\times 7a^4c\times 7a^4c = 7.7.7a^4a^4a^4ccc = 7^3a^{4\cdot2}c^3$ ec.; avremo in genere $(7a^4c)^n = 7^na^{4n}c^n$; ond' è che da tutti questi esempi rileviamo che *un monomio si eleva a potenza col moltiplicare l' esponente di ciascun suo fattore numerico e algebrico per l' esponente della potenza*.

Quindi per mandare ad effetto tutte le indicate operazioni eseguibili nell' elevazione a potenza di un monomio, notiamo *che il coefficiente va realmente elevato alla voluta potenza colle regole stabilite pei numeri: che alle lettere le quali non hanno esponente espresso, ossia che hanno per esponente l' unità, va dato l' esponente della potenza, e a quelle che l' hanno, va dato per esponente il prodotto dell' esponente proprio moltiplicato per quello della potenza*. Da ciò segue che quando un prodotto di più fattori diversi si riguardi per una potenza, essa risulta del prodotto delle rispettive potenze di tutti e singoli i fattori della sua radice, sicchè tanti diversi fattori trovansi nella potenza quanti sono i diversi fattori della rispettiva radice. Così $27a^6m^6p^9$ riguardato come potenza terza è $3^3\times(a^2)^3\times(m^2)^3\times(p^3)^3$. Così ac riguardato come potenza 2ª è formato dal prodotto delle radici 2ᵉ di tutti e singoli i suoi fattori elevati alla seconda potenza; e perciò essendo $a = (\sqrt{a})^2$, $c = (\sqrt{c})^2$, abbiamo $ac = (\sqrt{a})^2(\sqrt{c})^2$. Così mop riguardato per potenza ennesima è formata dalle radici ennesime di tutti e singoli i suoi fattori alla potenza ennesima elevati, è cioè

$$mop = (\sqrt[n]{m})^n\times(\sqrt[n]{o})^n\times(\sqrt[n]{p})^n \text{ (§. 175 III)}.$$

Conchiudiamo perciò che *la potenza ennesima di un prodotto è il prodotto delle potenze ennesime dei suoi fattori*.

Questa verità astratta non è per solito ben compresa dagli Allievi se non è illustrata da qualche applicazione ai numeri. Eccone perciò tre esempi, e sulle tracce di questi potranno gli Allievi altri procurarsene da loro medesimi.

ESEMPIO I. Moltiplicando 30 due volte di seguito per sè, troviamo che $(30)^3 = 27000$. E vediamo verificato che questa potenza terza di 30 è il prodotto delle potenze terze di tutti i fattori semplici che costituiscono il 30. Infatti dopo di aver trovato tutti i fattori semplici del 30, abbiamo $(30)^3 = (2 \,.\, 3 \,.\, 5)^3 = (2^3 \,.\, 3^3 \,.\, 5^3) = 8 \,.\, 27 \,.\, 125 = 27000$.

ESEMPIO II. Moltiplicando 420 per 420 troviamo che $(420)^2 = 176400$. E questa potenza seconda di 420 è realmente il prodotto delle potenze seconde di tutti i fattori semplici che costituiscono il 420. Infatti

$$420^2 = (2.2.3.5.7)^2 = (2^2.2^2.3^2.5^2.7^2) = (4.4.9.25.49) = 176400.$$

ESEMPIO III. Moltiplicando tre volte di seguito per sè stesso il 24, troviamo che $24^3 = 13824$. E questa potenza terza di 24 è realmente il prodotto delle potenze terze di tutti i fattori semplici che costituiscono il 24. Infatti

$$24^3 = (2^3 \,.\, 3)^3 = (2^{3\cdot3} \,.\, 3^3) = (512 \,.\, 27) = 13824.$$

Convalidato da questi esempi, il teorema vieppiù chiaro alla mente apparisce di quello apparirebbe se nella sua nuda astrattezza le si presentasse. E per questi

esempi stessi chiaro pure risulta che per ottenere la potenza di un prodotto fa d'uopo eseguire due operazioni, *alzare cioè alla data potenza tutti e singoli i fattori, e moltiplicare poscia tra loro le ottenute potenze.*

179. Come è avvenuto, che quando prendiamo una frazione di frazione, o una frazione di frazione di frazione, ec. siasi detto che si moltiplica una frazione per l' altra, e si sieno le frazioni riguardate come i fattori del prodotto, quantunque a rigore per una frazione non si possa moltiplicare, così quando le frazioni che si riguardano per fattori sono eguali, ossia quando d' una frazione prendiamo quella parte che è indicata da sè stessa, la così detta moltiplicazione per frazione ha per analogia preso il nome di elevazione a potenza. Per esempio, quando prendiamo $^2/_3$ di $^2/_3$, ossia moltiplichiamo, giusta il comun modo di esprimerci, $^2/_3$ per $^2/_3$, il $^4/_9$ che ne risulta dicesi *il quadrato* o la 2^a potenza di $^2/_3$: ma a rigore è la frazione che risulta dalla divisione del quadrato del numeratore per quello del denominatore. Così quando prendiamo $^2/_3$ di $^2/_3$ di $^2/_3$, l' $^8/_{27}$ che ne risulta dicesi *cubo* o 3^a *potenza* di $^2/_3$: ma a rigore è la frazione che risulta dalla divisione del cubo del numeratore per quello del denominatore, ec. Quindi usiamo dire essere la potenza ennesima di una frazione l' ultimo risultato che si ottiene, $n-1$ volte di seguito prendendo della data frazione in primo luogo, e poi di ciascuno dei successivi risultati che si vanno ottenendo, quella parte, che viene indicata dalla data frazione medesima. E ciò sappiamo che si ottiene moltiplicando tra loro tutti i numeratori e tra loro tutti i denominatori (§.101) ovvero (poichè tutti eguali tra sè sono i primi, e così i secondi) alzando alla potenza ennesima tanto il numeratore, quanto il denominatore della data frazione. Non è dunque a rigore la frazione, ma ciascun dei suoi termini, che si alzi a potenza, e quindi sotto il nome di *potenza ennesima* d' una frazione dobbiamo intendere la frazione che risulta dal prendere a numeratore e denominatore le *potenze ennesime* dei rispettivi suoi termini, e conchiuder quindi possiamo che a rigore in questa operazione detta ELEVAZIONE A POTENZA DI UNA FRAZIONE *otteniamo non già la potenza* ennesima *della frazione*, che a rigore non è suscettibile d' essere moltiplicata per sè stessa, e quindi a potenza elevata, *ma la frazione delle potenze* ennesime *dei suoi termini, l' un per l' altro divisi*.

Dopo di aver ben inteso il vero senso della così detta elevazione a potenza di una frazione, osservando

$$\text{che } (^a/_c)^2 = {^a/_c}\times{^a/_c} = \frac{a^2}{c^2}$$

$$\text{che } (^a/_c)^3 = {^a/_c}\times{^a/_c}\times{^a/_c} = \frac{a^3}{c^3}$$

$$\text{che } (^a/_c)^n = {^a/_c}\times{^a/_c}\times\ldots = \frac{a^n}{c^n}$$

possiamo conchiudere che *una frazione si eleva al grado* ennesimo, *a quel grado elevando ambi i suoi termini*; cosicchè chiaro risulta dalle idee della moltiplicazione per frazioni, che tanto più piccolo è il valore delle diverse potenze d' una vera frazione quanto più alto è il loro grado. E precisamente dir possiamo, che la potenza *ennesima* di qualunque unità frazionaria $^1/_m$ che è $\frac{1}{m^n}$ (poichè la potenza ennesima del numeratore 1 è sempre 1) è tante volte più piccola della frazione stessa $^1/_m$, quante volte il denominatore m di questa è contenuto nel denominatore m^n, per quanto cioè lo indica m^{n-1}. Così la potenza terza di $^1/_5$, cioè $^1/_{125}$ è tanto più piccola di $^1/_5$ per quanto lo indica $5^{3-1} = 25$.

Esempi

$$(5a^2gh^3)^4 = 625a^8g^4h^{12}$$

$$(7cf^3)^5 = 16807c^5f^{15}$$

$$(9m^2p)^n = 9^nm^{2n}p^n$$

$$(-2a^2ch)^4 = 16a^8c^4h^4$$

$$(-9cf^2g^3)^3 = -729c^3f^6g^9$$

$$(3a^mc^n)^r = 3^ra^{mr}c^{nr}$$

$$\left(\frac{4c^2m}{3hp^3}\right)^2 = \frac{16c^4m^2}{9h^2p^6}$$

$$\left(-\frac{6c^3h^2}{8m}\right)^3 = -\frac{216c^9h^6}{512m^3}$$

$$\left(-\frac{9a^2}{11}\right)^4 = \frac{6561a^8}{14641}$$

II. Risoluzione delle potenze o estrazione delle radici dei monomii

180. L' estrazione delle radici è una operazione diametralmente opposta alla elevaziono a potenza che decompone ciò che questa ha composto, e perciò il suo processo tutto deducesi dall' esame di ciò che si è fatto nell' esecuzione di quest' ultima, come accade della divisione rispetto alla moltiplicazione. Se la quantità data a considerarsi per potenza di un dato grado è puramente numerica, in tal caso, se il numero è realmente una qualche potenza di qualcuno dei numeri semplici che riguardar possiamo come *monomii numerici*, si trarrà allora dalla tavola (§. 177) la sua radice; in caso diverso si otterrà coi metodi che daremo in seguito.

Estrazione di radice dai monomii interi.

181. Se la quantità considerata come potenza è un *monomio algebrico*, per dedurne la sua rispettiva radice, convien dar regolo per rapporto *ai segni e per rapporto ai coefficienti ed esponenti delle lettere*.

Rapporto ai segni, quando da una quantità estrarre vogliamo una radice dispari, risulta (§. 178. I.), che *nei gradi dispari la radice debbe aver sempre lo stesso segno della potenza*. Quando estrarre vogliamo una radice di grado pari da una quantità; convien notare se dessa sia positiva o negativa. I. Se la quantità è negativa; la supposizione che sia una potenza di grado pari è un assurdo: è cioè un assurdo il supporre, che possa essere stata prodotta da una radice di grado pari; poichè la radice esser non potrebbe che o positivà o negativa, e nell' uno e nell' altro caso, elevata ad un grado pari darebbe un prodotto positivo e non negativo, come è la quantità data. Così $\sqrt{-a^2}$ non è nè $+a$, nè $-a$, poichè entrambe alzate a quadrato danno $+a^2$, e non $-a^2$, come l' ipotesi esigerebbe. Non esistono dunque radici di grado pari di quantità negative. Perciò diamo il nome di *simbolo immaginario* o *simbolo delle impossibili radici* ad ogni radicale di grado pari che comprende una quantità negativa, ed esprimiamo l' impossibilità della esistenza di queste radici col dire *che nei gradi pari le radici delle quantità negative sono immaginarie*. » II. Se la quantità è positiva, siamo incerti se sia stata prodotta da una radice affetta dal segno $+$ o dal segno $-$, poichè la stessa potenza pari positiva è prodotta dalla rispettiva radice, sia che questa si prenda affetta dal $+$ o dal $-$: e perciò per indicare che la radice può avere tanto il valor positivo che il negativo, la facciamo precedere dal doppio segno $\pm$. Così $\sqrt{a^2} = \pm a$; e conchiudiamo che *ne' gradi pari le radici delle potenze positive deggiono essere affette dal doppio segno*.

Per rapporto poi agli esponenti e ai coefficienti, da cui possono essere affetti i monomi algebrici dai quali estrarre vogliamo la radice, tre casi meritano di essere distinti; ed ecco come dobbiamo diportarci.

182. *Può darsi che il monomio abbia una sola lettera*. In tal caso notiamo che siccome per elevare alla 3^a potenza per es. la quantità a^5 (che perciò riguardiamo come radice) noi moltiplichiamo il suo esponente 5 pel 3 esponente della voluta potenza, e otteniamo $(a^5)^3 = a^{5\cdot 3} = a^{15}$, così per far regresso da questa 3^a potenza a^{15} alla radice che l' ha prodotta, dovremo por 3 dividere l' esponente 15, ed avremo

$$\sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15}{3}} = a^5$$

o in genere essendo $(q^n)^r = q^{nr}$, debbe essere

$$\sqrt[r]{q^{nr}} = q^{\frac{nr}{r}} = q^n;$$

cioè, non differendo una potenza monomia (quando è priva di coefficiente, dalla sua radice che nel puro esponente, il quale è l' esponente della radice moltiplicato per l' esponente indicante il grado cui è stata elevata, così è chiaro che « *dato per potenza un monomio semplice, si ottiene la sua radice scrivendo il monomio stesso coll' esponente proprio diviso per l' esponente della voluta radice* » abbiamo cioè

$$\sqrt[r]{c^m} = c^{\frac{m}{r}}$$

183. E qui è da notarsi che in Algebra al modo stesso che una quantità non è divisibile per un dato divisore, se questo non è realmente fattore del dividendo, così ugualmente non può da una quantità estrarsi la radice di un dato grado r, se realmente da questa radice non sia stata

prodotta, se cioè l'esponente m della potenza non abbia r per un suo fattore, ossia se la frazione $^m/_r$ non sia apparente. Quindi in tutti que' casi particolari nei quali r divide esattamente m, sicchè $^m/_r$ è un quoto intero q, noi possiamo realmente convertire l'espressione algebrica $\sqrt[r]{c^m}$ nell'altra più breve e priva di segno radicale c^q: se poi la frazione $^n/_r$ è vera o mista, sicchè non possa perdere l'aspetto frazionario, in tal caso (*essendo impossibile un vero esponente frazionario*, perchè l'esponente indica quante volte va posta come fattore una quantità, e i numeri indicanti volte sono essenzialmente interi) la espressione $c^{\frac{m}{r}}$ non è che un altro modo di indicare *la radice erresima di* c^m.

Così $c^{\frac{4}{3}}$ altro non indica che $\sqrt[3]{c^4}$; e poichè il 4 non è per 3 divisibile come sarebbe necessario affine di potere esprimere per mezzo del fattore c la radice terza di c^4, conchiudiamo, che la radice terza di c^4 non può per mezzo del fattore c essere indicata senza segno radicale. Potrebbe però $\sqrt[3]{c^4}$ essere indicata senza segno radicale da un'altra lettera, qualora c invece di essere un fattore semplice fosse potenza terza d'un'altra quantità. Se per es. fosse $c = p^3$, noi avremmo allora

$$\sqrt[3]{c^4} = \sqrt[3]{(p^3)^4} = \sqrt[3]{p^{12}} = p^4$$

$$\sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{(2^3)^4} = \sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$$

184. II° *Può darsi che il monomio risulti di più fattori letterali*. Ed in tal caso siccome una radice perchè divenga potenza, altro non esigo so non che sia moltiplicato l'esponente d'ogni suo fattore pel grado della richiesta potenza (§.178) così perchè una potenza divenga radice, basta che in tal caso l'esponente di ogni suo fattore sia diviso pel grado della richiesta radice. Abbiamo dunque in genere

$$\sqrt[n]{c^r h p^m} = c^{\frac{r}{n}} h^{\frac{1}{n}} p^{\frac{m}{n}}$$

Possiamo perciò dire che come la potenza ennesima di un prodotto è il prodotto delle potenze ennesime di tutti e singoli i suoi fattori (§ 178) così al contrario *la radice ennesima di un prodotto è uguale al prodotto delle radici ennesime di tutti e singoli i suoi fattori*. Così dopo essersi assicurati per mezzo della moltiplicazione che 12^3, $= 1728$, o quindi che $12 = \sqrt[3]{1728}$, decomponendo 1728 nei suoi fattori, verifichiamo l'esposto teorema. Abbiamo infatti

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{(2^6.3^3)} = 2^{\frac{6}{3}} \times 3^{\frac{3}{3}} = 2^2 \times 3 = 12$$

Così essendo $180^2 = 32400$, e perciò $180 = \sqrt{32400}$, verifichiamo il teorema, osservando che

$$\sqrt{32400} = \sqrt{(5^2.3^4.2^4)} = 5.3^2.2^2 = 180$$

Così essendo $525^2 = 275625$, e quindi $525 = \sqrt{275625}$, ciò verifichiamo osservando che

$$\sqrt{275625} = \sqrt{(3^2.5^4.7^2)} = 3.5^2.7 = 525$$

E se il monomio da cui volesse estrarsi la radice ennesima fosse composto di fattori aventi per esponente la semplice unità come $\sqrt[n]{ac}$, in tal caso essendo ac la potenza ennesima, è certo che il fattore a è una potenza ennesima, e che parimenti una potenza ennesima è c. Perciò sì a che c sono stati prodotti coll' elevare ad n la loro radice *ennesima*, abbiamo cioè

$$ac = (\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{c})^n$$

e quindi estraendo la radice *ennesima*

$$\sqrt[n]{ac} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{c}$$

ovvero, posponendo i membri, abbiamo

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{ac}$$

abbiamo cioè la proposizione stessa dimostrata nel principio di questo paragrafo inversamente esposta che cioè il *prodotto delle radici ennesime di due o più fattori è uguale alla radice ennesima del prodotto dei medesimi fattori*. Ora il secondo membro suole chiamarsi il risultato della moltiplicazione accennata nel primo (impropriamente però perchè niuna esecuzione di moltiplica realmente ha luogo), e quindi si dice che la *moltiplicazione di due o più radicali del medesimo grado si fa col porre sotto un solo segno comune il prodotto dei loro fattori*.

185. Applicando il teorema che la potenza *ennesima* di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze ennesime dei suoi fattori al caso in cui i fattori sieno tutti uguali, ne scende l'importante corollario

che *radice terza* della *potenza quarta* di c è la *potenza quarta* della *radice terza* di c; e in genere *la radice erresima della potenza ennesima di una quantità è la potenza ennesima della radice erresima della stessa quantità*. Infatti

$$\sqrt[3]{c^4} = \sqrt[3]{(cccc)} = \sqrt[3]{c}\times\sqrt[3]{c}\times\sqrt[3]{c}\times\sqrt[3]{c}$$

$$= \sqrt[3]{c}^{\,4}$$

Ed in genere

$$\sqrt[r]{c^n} = \sqrt[r]{ccc\ldots} = \sqrt[r]{c}\times\sqrt[r]{c}\ldots = (\sqrt[r]{c})^n$$

Avvicinando perciò il primo all'ultimo membro, abbiamo

$$\sqrt[r]{c^n} = (\sqrt[r]{c})^n$$

E nei numeri l'operazione indicata nel 2° membro è molto più facile ad eseguirsi che l'altra espressa nel 1°.

Ed in vero se, avendosi dall'esposto teorema la seguente uguaglianza

$$(A)\ldots\ldots \sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5,$$

noi operiamo sul destro membro di (A), otteniamo pel risultato

$$(\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$$

e conchiudiamo perciò che lo stesso valore ha pure il membro sinistro di (A), ossia che

$$\sqrt[3]{8^5} = \sqrt[3]{32768} = 32.$$

Verifichiamo poi (senza bisogno di estrarre radice) essere realmente 32 la radice terza del numero 32768 col moltiplicarlo due volte di seguito per sè stesso. Ma per giungere al risultato 32 operando in vece sul membro sinistro, d'uopo sarebbe di estrarre la radice terza da 32768, operazione ben più lunga, come vedremo, che elevare il 2 alla quinta potenza, siccome si è dovuto fare operando sul membro destro.

Se, avendosi per esempio $\sqrt[3]{(64.729)^2} = (\sqrt[3]{64.729})^2$, noi operiamo sul destro membro, otteniamo

$$(\sqrt[3]{64.729})^2 = (4.9)^2 = 36^2 = 1296,$$

e conchiudiamo che lo stesso valore ha pure il membro sinistro, ossia che

$$\sqrt[3]{(64.729)^2} = \sqrt[3]{(46656)^2}$$

$$= \sqrt[3]{2176782336} = 1296$$

E verifichiamo che 1296 è l'indicata radice terza, due volte di seguito moltiplicandolo per sè stesso. Per ottenere però il chiesto 1296 operando sul membro sinistro, converrebbe estrarre la radice terza dal 2176782336, lo che è una operazione ben più lunga, come vedremo, di quella che si è eseguita sul membro destro.

E questi esempi mostrano chiaramente come lo estrarre la radice *erresima* da una potenza *ennesima* di a importi due operazioni, cioè estrarre prima la radice *erresima* da a, e quindi dopo che questa radice siasi ottenuta, elevarla alla potenza ennesima *(a)*.

(a) Dalle esposte cose risulta che la estrazione della radice di un dato grado da una potenza per es. $\sqrt[3]{5^6}$ può presentarcisi sotto due aspetti diversi secondo che vi si applichi o la soluzione del problema (§. 182) o il teorema (§. 185): ma e sotto l'uno e sotto l'altro aspetto ci conduce al medesimo risultato.

Secondo il (§ 182) abbiamo

$$(A)\ldots\ldots \sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$$

Cerchiamo cioè qual'è quella potenza di 5 che considerata come radice terza, ossia che posta tre volte come fattore dia 5 elevato alla potenza sesta; e questa troviamo essere la seconda potenza di 5, ossia 25.

Secondo poi il teorema (§ 185) abbiamo

$$(B)\ldots\ldots \sqrt[3]{5^6} = (\sqrt[3]{5})^6 = .$$

$$\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5} =$$

$$(\sqrt[3]{5})^3\times(\sqrt[3]{5})^3 = 5\times5 = 25.$$

E qui noi diciamo la radice terza della potenza sesta di 5 è uguale alla radice terza di 5 (qualora esista) elevata alla sesta potenza. E se la radice terza di 5, ossia quella quantità che posta tre volte come fattore dia 5 non esiste, è sempre certo che se esistesse, posta tre volte come fattore darebbe 5; e posta sei volte darebbe 5×5 ossia 25. Ecco il naturale significato del calcolo esposto in (B). Dal che risulta che se 25 è stato il finale risultato di

186. III° *Può darsi che il monomio abbia un coefficiente*, ed in tal caso, siccome nell'elevazione a potenza il coefficientè della radice si eleva realmente al grado della potenza voluta, così per faro regresso alla radice, fa d'uopo estrarre realmente la radice dal coefficiente nel modo detto (§.180).

$$\text{Così } \sqrt[4]{81a^8} = 3a^2.$$

187. Conchiudiamo perciò che *la estrazione delle radici dai monomii interi si eseguisce algebricamente, estraendo realmente la radice dal coefficiente, e dividendo l'esponente di ciascuna lettera pel grado della radice richiesta.*

Estrazione di radici dai monomii frazionari.

188. Come non potrebbe dirsi a rigore che una frazione venga elevata a potenza, (§. 179) così nemmeno che da una frazione venga estratta la radice: ma al modo stesso che quando eleviamo ad n ambi i termini della frazione $^a/_c$, si usa dire, che alla potenza ennesima eleviamo la frazione stessa, così pure si usa dire che si estrae la radice ennesima della frazione $\frac{a^n}{c^n}$, quando estraendo la radice d'ambi i suoi termini, riotteniamo $^a/_c$. Quindi in genere

$$\sqrt[n]{\frac{p^r}{q^s}} = \frac{\sqrt[n]{p^r}}{\sqrt[n]{q^s}}$$

dal che apparisce che in questa operazione della ESTRAZIONE DI RADICE D'UNA FRAZIONE, *otteniamo realmente, non già la radice ennesima della frazione*, giacchè radice ennesima non può darsi di ciò che non è potenza ennesima, nè a rigore può mai dirsi che una frazione sia potenza (§.129); ma otteniamo la frazione *che risulta* dal dividere la radice *ennesima* del numeratore per quella del denominatore.

Ben inteso però il vero senso che dar si debbe all'*estrazione delle radici delle frazioni*, di questa espressione anche noi per brevità faremo uso, dicendo che *si estrae la radice di una frazione, separatamente estraendola sì dal suo numeratore, che dal suo denominatore.*

Esempi di estrazioni di radici dai monomii interi e frazionari.

$$\sqrt{c^6p^2} = \pm c^3p$$

$$\sqrt[3]{8a^6m^3} = +2a^2m$$

$$\sqrt[4]{256a^8c^{12}} = \pm 4a^2c^3$$

$\sqrt{-4a^2c^4}$ è immaginaria

$$\sqrt[3]{-27g^3h^6} = -3gh^2$$

$$\sqrt[5]{-32f^5g^5} = -2fg$$

$$\sqrt[3]{\frac{8a^6}{27c^3}} = +\frac{2a^2}{3c}$$

$$\sqrt[4]{\frac{81a^8c^4}{m^4p^8r^8}} = \pm\frac{3a^2c}{mp^2r^2}$$

$$\sqrt[5]{-\frac{c^5f^5g^{10}}{1024a^5}} = -\frac{cfg^2}{4a}$$

Intorno al significato delle quantità affette I. *da esponente intero positivo* : II. *da esponente fratto positivo* : III. *da esponente zero* e IV. *da esponente intero e fratto negativo*.

189. Nel trattamento delle potenze e delle radici non solo talvolta c'incontriamo in quantità affette da esponente frazionario, siccome abbiam già osservato, ma ancora

---

questo ragionamento, non è già stato l'effettivo risultato della elevazione alla potenza sesta della radice terza di 5.

Il 25 è sempre prodotto di 5×5; e sono le esigenze del calcolo, che mentre ci mostrano impossibile la esistenza della radice terza di 5, ci offrono talvolta il 5 vestito di forme delle quali fa parte anche la impossibile radice terza di 5 È di fatto infallibile che « *è sempre* 5 *la terza potenza di quella quantità radice*, *la cui terza potenza è* 5 » e se questa quantità radice terza di 5 non esiste, il dire che 5 è *uguale alla potenza terza della sua radice terza* è un modo di esprimere il 5 per mezzo degli impossibili suoi fattori, ma non già un ottenerlo per un risultato di una effettiva loro moltiplicazione, sicchè possa dirsi giustificata l'opinione di quelli i quali credono che debba la radice terza di 5 avere una qualche esistenza (geometrica almeno, come disse Newton) se non può averla aritmetica, perchè non può non esistere chi ha la potenza di produrre qualche cosa, quale è il 5. Il 5 è; ma la radice che non è, non lo produce. Non utili, ma utilissimi troveremo questi riflessi per formarci esatte nozioni nella teorica dei radicali.

in quantità aventi talvolta nel posto dell' esponente lo zero e tal' altra un esponente negativo, e così intero come frazionario. Necessita perciò conoscere di queste quantità il valore e l'origine.

Potenze intere
essia
quantità affette da esponente intero positivo.

190. L' esponente è stato in Algebra introdotto (§.36) per esprimere quante volte una quantità è posta come fattore. Quindi allora solamente che esso è un intero, adempie al proprio ufficio, giacchè un numero intero soltanto (§. 183) può farci conoscere il quante volte una quantità è posta in funzione di fattore.

Potenze fratte
essia
quantità affette da esponente positivo frazionario.

191. Allorchè nel posto dell' esponente troviamo una frazione, questa non può essere giammai la primitiva espressione di veruna condizione di quesiti o teoremi che si traducono in algebrico linguaggio, poichè per quanta generalità ci piaccia concedere alle algebriche speculazioni, niuna condizione può indurci mai a volere che una quantità per esempio debba essere posta nel calcolo come fattore per $^3/_4$ *di volta*, espressione insignificante. Se dunque nel posto dell' esponente si trova una frazione, questa non può figurarvi se non come indicazione d' una divisione da eseguirsi nell' esponente. E poichè la divisione di un esponente non si eseguisce che per un estrazione di radice (§. 182) egli è bene chiaro che tutte le volte che questa divisione non ci dà un quoto intero, tutte le volte cioè che il grado della voluta radice non è un submultiplo del grado della potenza, sicchè la frazione che è nel posto dell' esponente vi persista perchè non apparente, niun risultato si è ottenuto; o quindi la frazione che nel posto dell' esponente rimane, non serve che ad indicarci un tentativo fallito; ed è perciò un altro simbolo di quella stessa estrazione di radice che non abbiamo potuto eseguire.

192. Una quantità con esponente frazionario però non solo è simbolo di estrazione di radice, ma in pari tempo lo è anche di elevazione a potenza. È simbolo di radice per gli esposti riflessi: e lo mostrano le seguenti equazioni in (A). È simbolo di potenza e lo mostrano le equazioni a cui per dimostrazione scendiamo in (B).

$$\text{(A)....}\quad c^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{c^4};\ \sqrt[r]{c^n} = (\sqrt[r]{c})^n$$

Ma abbiamo al (§.185).

$$\sqrt[3]{c^4} = (\sqrt[3]{c})^4;\ \sqrt[r]{c^n} = (\sqrt[r]{c})^n$$

Dunque

$$\text{(B)....}\quad c^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{c})^4;\ c^{\frac{n}{r}} = (\sqrt[r]{c})^n$$

Il simbolo dunque delle quantità con esponente fratto, anzichè non avere significato, siccome a primo aspetto parrebbe, ne ha in vece due distinti. esprime cioè due diverse operazioni che ci recano ad un identico risultato. Riguardato perciò anche come il simbolo di una elevazione a potenza, esso esprime un reale concetto. Sarebbe certamente simbolo insignificante se prendessimo per esponente la frazione che ne occupa il posto, giacchè l' esponente non può essere che un intero (§.183). Ma dalle equazioni in (B) risulta che uon la frazione $^4/_3$, ovvero in genere $^n/_r$, ma il solo numeratore di esse 4 od n è il vero esponente; e che il denominatore 3 od r, mentre non ha influenza alcuna nella determinazione del grado della potenza, che è ufficio del solo numeratore esponente lo esprimere, è unicamente destinato ad avvertirci che la quantità da elevarsi all' esponente 4 o ad n non è il fattore c come a primo aspetto o senza riflettere si crederebbe, ma è la radice del fattore c di quel grado che esso denominatore manifesta, cioè nel nostro caso è *la radice quarta* o *la erresima*. Perciò alla espressione impropria « c *elevato a quattro terzi* » dobbiamo sostituire l' altra ben propria » *radice terza di* c *elevata alla quarta potenza*; e all' altra espressione « c *elevata ad* n *diviso* r » sostituire dobbiamo « *radice erresima* di c *elevata ad* n. » (a)

(a) Così esprimendoci, noi siamo unisoni anche per rapporto alla elevazione delle quantità a potenze fratte, a quel modo di vedere che abbiamo in Aritmetica esternato rapporto alla moltiplicazione e divisione delle quantità per frazioni, diamo a divedere cioè che *non solo il così detto molti-*

193. Le così dette potenze fratte, sebbene abbiano nel posto dell' esponente una frazione, hanno dunque in realtà ancor esse un esponente intero, e deggiono perciò essere alle medesime leggi di calcolo soggette, cui soggiacciono le quantità affette da esponenti interi.

Così per esempio

$$c^{\frac{4}{3}} \times c^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{c})^4 \times (\sqrt[3]{c})^2 = (\sqrt[3]{c})^{4+2}$$

$$= (\sqrt[3]{c})^6 = \sqrt[3]{c^6} = c^{\frac{6}{3}} = c^2$$

La serie delle eguaglianze per cui siamo passati prima di giungere all' ultimo risultato c^2 è giustificata dagli ora esposti teoremi; e questo è il necessario andamento dei ragionamenti che deve nostra mente seguire per convincersi che c^2 è l' ultimo risultato cui ci reca il primo membro delle sopraesposte uguaglianze. Ma siccome questo risultato è il medesimo di quello che si ottiene sommando le frazioni che stanno nel posto degli esponenti, così diciamo che la moltiplicazione delle potenze fratte si eseguisce facendo la somma degli esponenti frazionari al modo stesso che si pratica per la moltiplicazione delle potenze aventi gli esponenti interi. Infatti facendo questa somma, abbiamo

$$c^{\frac{4}{3}} \times c^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} = c^{\frac{6}{3}} = c^2.$$

Consimili ragionamenti hanno luogo per rapporto alla divisione di potenze fratte espressa per una medesima lettera, e così pure per rapporto alla loro elevazione a potenza o estrazione di radice come vedremo. Ed appunto perchè anche in questi casi si ottengono i medesimi risultamenti, eseguendo sulle frazioni che stanno nel posto degli esponenti quelle operazioni dello stesso nome che si eseguirebbero sugli esponenti interi se si dovesse agire sovra potenze intere, è giustificata la regola che ci insegna ad assoggettare le potenze fratte allo stesso trattamento delle potenze aventi gli esponenti interi (a).

---

plicare e dividere per frazione, ma ancora il così detto elevare le quantità a potenza fratta, non è un fare come da molti si sostiene una unica operazione individua, ma è un eseguire pel numeratore solo, la operazione che è indicata dalla parola presa nel significato che a rigore le compete, dopo di avere eseguita pel denominatore l operazione opposta. Come « *moltiplicare* c *per quattro terzi* » significa non già render *c quattro terzi di volta* più grande (espressione assurda) ma rendere *quattro volte più grande* il terzo di *c*: come « *dividere* c *per quattro terzi* » significa non già rendere *c quattro terzi di volta* più piccolo (espressione assurda pur essa) ma render quattro volte più piccolo il triplo di *c*, così « *elevare* c *a quattro terzi* » significa non già elevare *c* alla potenza *quattro terzi* (espressione anch' essa assurda ugualmente) ma un elevare alla *potenza quarta* la radice terza di *c*.

Non è dunque l' Algebra che nelle potenze fratte ci offra, come molti seguendo Francoeur ci asseriscono, un simbolo insignificante: siamo noi che male leggendolo, diciamo parole insignificanti. Ponderiamo che il primo membro della equazione in (B) è equivalente al secondo, e alle parole insignificanti « c *posto quattro terzi di volta come fattore* » che ci pone in bocca il primo membro si sostituiscano quelle che ci pone in bocca il secondo membro che esplica il valore del primo, e diremo « *radice terza di c posta quattro volte come fattore* » e il significato delle nostre parole sarà chiaro e lampante.

(a) Bisogna però dimostrare questa coincidenza di risultamenti. In grave errore infatti cadremmo se per *amore di brevità* ci credessimo dispensati dal dimostrare che nei potenziali fratti espressi per una stessa lettera, la moltiplicazione si fa con la somma dei loro frazionari esponenti, la divisione con la sottrazione, ec. perchè si è già dimostrato dovrsi ciò eseguire allorchè gli esponenti sono interi. Ed in vero una dimostrazione appoggiata sull' officio degli esponenti, siccome è quella delle regole per le sopracitate operazioni quando gli esponenti sono interi, è ben evidente, che non è applicabile al caso in cui nel posto degli esponenti vi hanno frazioni che sono dell' ufficio degli esponenti destituite. Il ragionamento necessario per convincere l' intelletto è il seguente. Riflettiamo prima di ogni altro che *c* elevato come suol dirsi alla frazione $^n/_r$ altro non è che la radice *erresima* di *c* elevata al *n*; giacchè la prima cosa necessaria a conoscersi è la cosa su cui dobbiamo operare. Eseguiamo quindi sopra c elevato alla potenza *n* quelle operazioni che noi dobbiamo eseguire sulla sua *radice erresima*, e giunti che siamo all' ultimo risultato dividiamo il suo esponente per *r*, e così correggiamo l' errore che abbiamo commesso al principio del calcolo di operare cioè sopra *c* elevato al *n* piuttosto che sulla sua *radice erresima*, siccome dovevasi. Ma col così diportarci nelle moltiplicazioni e divisioni dei potenziali fratti espressi da una stessa lettera, non che nelle elevazioni a potenza e nelle estrazioni di radici, noi precisamente eseguiamo sulle frazioni che stanno nel posto degli esponenti quelle operazioni dello stesso nome che si eseguirebbero sugli esponenti, se si trattasse di potenziali ad esponente intero: dunque *trattando nelle diverse operazioni gli esponenti fratti colle stesse regole con cui si trattano gli esponenti interi, si opera bene.*

Potenze nulle.

194. Quando nel posto dell' esponente di una quantità troviamo lo zero, tal simbolo non può essere al certo la traduzione in linguaggio letterale di condizione veruna di quesiti o teoremi. Non può per esempio c^0 indicarci che c non è mai posta nel calcolo, giacchè ciò si indica con $c \times o$: non può indicarci che c esista, ma sia priva di ogni esponente, non può cioè supporsi che sia $c^0 = c$, perchè se c esiste, e non vi è esponente espresso, non è che manchi, ma vi si sottintende l' 1, non esistendo quantità senza esponente. Considerando perciò lo zero come un vero esponente, il c altro esprimere non potrebbe che « *c posto zero volte come fattore* »; ed è ben chiaro che niun problema o teorema può mai presentarci una condizione che sia significabile per questa espressione che non significa nulla. Egli è perciò manifesto, che se zero si trova nel posto di un esponente, non può figurarvi se non come il risultato di una qualche operazione, che sull' esponente sia stata eseguita. E siccome per poco che si rifletta, niuna delle sei operazioni che hanno luogo sulle quantità possono recarci al risultato zero ad eccezione della sottrazione, così è evidente non potere esso derivare che da una sottrazione. E poichè la sottrazione negli esponenti non peraltro si eseguisce che per effettuare una divisione, e perchè quando il residuo di questa sottrazione è zero, ciò prova che i fattori tutti uguali a c, che costituiscono il divisore hanno eliso tutti i fattori uguali a c che si trovano nel dividendo, cosicchè il dividendo è uguale al divisore, conchiudiamo che c^0 è l' indicazione di un quoto che risulta dalla divisione d'una quantità qualsiasi per sè stessa, ed è perciò 1. Ecco in breve il fatto ragionamento c^0 è c^{n-n}, ossia $c^n : c^n$. Ma $c^n : c^n = 1$. Dunque $c^0 = 1$. Quindi allorchè qualche lettera affetta dall' esponente zero si trovi come fattore in qualche termine, può trascurarsi, o se piaccia può aggiungersi come fattore a qualsivoglia quantità, perchè aggiungere e togliere 1 come fattore, ossia moltiplicare e dividere per 1 è un lasciare inalterata la quantità. Così $a^0 = 1$; $c^0 = 1$; $(a/c)^0 = 1$. Così $vx^0 = v$; $a^n c^0 = a^n$; $a^0 c^m = c^m$; $a(m-p)^0 = a$; $3m^0 - 2c^0 = 1$; $(c^0 m - m^2 p^0) 3mp^2 = 3m^2p^2 - 3m^2p^2$; $2a^0 - 2c^0 = 0$.

Potenze negative ossia quantità affette da esponente negativo sì intero che frazionario.

195. Anche le quantità con esponente negativo così detto, non possono essere la primitiva espressione in linguaggio letterale delle condizioni di verun problema o teorema: poichè considerando il $-n$ per es. come un esponente dato alla quantità c, il c^{-n} altro non potrebbe indicarci se non che « *c posto meno n volte come fattore* » parole del tutto insignificanti, e perciò non atte ad esprimere condizione veruna.

Ma se insignificanti sono le esposte parole, insignificante al certo non è il simbolo c^{-n} che erroneamente viene in quelle tradotto. E ciò che trascina molti Matematici a quella insignificante espressione è l' erroneo credere che c^{-n} sia l' indicazione di un termino affetto da un semplice esponente, il credere cioè che il $-n$ sia l' indicazione non di una sottrazione di quantità, ma di una quantità indipendentemente dall' indicazione di qualsiasi operazione che l' accompagni, di una quantità cioè in funzione di diminuzione, d' una quantità negativa. In questa erronea supposizione che l' esponente sia una semplice quantità negativa, e non la indicazione di una sottrazione, non potendosi certamente una quantità negativa prestare all' officio cui l' esponente è destinato, convien dire che c^{-n} è un' espressione che non significa nulla, e che perciò unicamente per convenzione può ritenersi uguale a qualche quantità; e questa erronea supposizione poi è causa di contraddizioni e di oscurità.

196. Abbandonate queste false vedute. Tenete per fermo che nei processi del calcolo il segno — ha sempre il significato di *sottrarre*, e mai quello del *qualificare* la quantità, giacchè la massima che il segno — talvolta qualifichi (sebbene non sia estranea anche ai più moderni trattatisti) noi non avemmo difficoltà di asserirvi (§. 15) che è la *prima mali labes* dell' insegnamento delle matematiche. Sostenete i diritti dell' Algebra, il cui prezioso requisito dell' evidenza delle sue dimostrazioni tutto riposa nell' accordare sempre ai suoi segni un medesimo preciso e non equivoco o ambiguo significato: dite che nei processi del calcolo $-c$ indica sempre una cosa stessa, la *sottrazione di c*; e tosto c^{-m} cesserà di essere una espressione insignificante, e *diverrà* (analogamente ai principi già esposti

(§.17) *l' indicazione di una quantità nel posto del cui esponente è indicata una sottrazione ineseguibile perchè manca il minuendo.*

Dir dunque c^{-n} è un dire che trattasi di sottrazione negli esponenti, e quindi trattasi di una divisione, giacchè unicamente nel solo caso di divisione si eseguisce la sottrazione negli esponenti. Dir dunque c^{-n} è un dire che c^{-n} è un risultato d' una divisione, ossia è un quoto, e nelle sue divise medesime questo simbolo per poco che si analizzi ci offre il suo valore, quello in pari tempo additandoci del dividendo e del divisore.

Non potendo esistere fattori nel quoto, che non sieno nel dividendo, dire che il quoto è c^{-n}, è un dire 1° che nel dividendo havvi un certo numero di fattori tutti ugnali a c: 2° che dopo aver tolto dal dividendo tutti quelli che ha comuni col divisore, in esso non rimane verun fattore eccetto l' unità: 3° che dopo averno tolti altrettanti nel divisore, rimane nel divisore un numero n di c da doversi sottrarre, cosicchè posto che il dividendo sia c^m, il divisore è c^{m+n}; e 4° finalmente che allora solo il numero n dei fattori che rimangono nel divisore potrebbe essere anch' esso sottratto (e si avrebbe nella sottrazione degli esponenti zero di resto) quando nell'esponente del dividendo si aggiungesse $+n$.

Dir dunque c^{-n} è dire un tal quoto che diventa c^0, ossia 1, quando all' esponente m del dividendo c^m si aggiunge n, sicchè divenga $c^{m+n} = c^m \times c^n$, ossia quando si renda il dividendo c^n *volte* più grande. Ma quando si rende c^n *volte* più grande il dividendo, c^n volte più grande diviene anche il quoto: dunque il quoto c^{-n}, divenendo 1, è divenuto c^n *volte* più grande: dunque è c^n *volte* più piccolo di 1; ossia è una unità frazionaria che ha per denominatore c^n.

L' analisi del simbolo c^{-n} ben condotta ci porta dunque a conchiudere che

$$c^{-n} \times c^n = 1, \text{ donde } c^{-n} = \frac{1}{c^n}$$

Abbiamo cioè dimostrato che

$$c^{-n} \text{ è } c^{m-(m+n)}, \text{ ossia è } \frac{c^m}{c^{m+n}}.$$

Ma riducendo la frazione ai menomi termini, abbiamo $\frac{c^m}{c^{m+n}} = \frac{c^m}{c^m . c^n} = \frac{1}{c^n}$:

Dunque $c^{-n} = \frac{1}{c^n}$.

197. Con lo stesso procedimento analitico si giunge a simile risultato nel caso pur anche che n abbia un valore frazionario.

Conchiudiamo perciò che *una quantità con l' esponente negativo sì intero che frazionario non è che l' unità divisa per la quantità stessa affetta dallo stesso esponente però non più negativo, ma positivo.*

Perciò

$$\frac{c}{a^r} = c \times \frac{1}{a^r} = a^{-r}c$$

$$\frac{c}{m} = c \times \frac{1}{m} = cm^{-1}$$

$$^{ac}/_{mn} = acm^{-1}n^{-1}$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n$$

$$\frac{a}{c^{m-n}} = ac^{n-m}$$

198. E da ciò apparisce che *in una frazione il denominatore si toglie senza alterare il valore della quantità, portandolo a fattore del numeratore, e cambiando soltanto il segno al suo esponente.* E questa operazione riesce utile, poichè per mezzo di essa riducesi al calcolo degli interi il calcolo più complicato delle frazioni.

$$\text{Così} \quad \frac{a^6c^5}{m^9} \times \frac{m^4}{c^8} = \frac{a^6}{c^3m^5}.$$

e lo stesso risultato otteniamo eliminando i denominatori col mezzo ora indicato, poichè abbiamo

$$a^6c^5m^{-9} \times m^4c^{-8} = a^6c^{-3}m^{-5} = \frac{a^6}{c^3m^5}$$

Risultati identici in tutt' altre operazioni si ottengono tanto col calcolo delle frazioni che con quello fondato sugli esponenti negativi, siccome per esercizio può l' Allievo da sè verificare sopra analoghi esempi.

III. Formazione delle potenze dei polinomii

199. Bastano le semplici regole della moltiplicazione de' polinomi per poter elevare a una potenza *ennesima* un polinomio qualunque; poichè si ha solo a moltipli-

care $n-1$ volte di seguito per sè stesso. Ma se il grado della potenza è piuttosto alto, le numerose moltiplicazioni dei successivi prodotti (che si rendono sempre più complicati) per lo stesso dato polinomio, riescono assai incomode, ed è perciò che gli Algebristi vi han trovato un compenso.

ELEVAZIONE A POTENZE DE' BINOMI.

200. Diamo principio al trattato della elevazione a potenza delle quantità complesse dai binomi, e perchè sono i polinomi meno composti, altro essi non essendo che o la *somma* di due termini a,c, espressa da $(+a+c)$ o da $(-a-c)$ ovvero la loro differenza espressa da $(+a-c)$ o da $(-a+c)$; e perchè le regole che riguardano la elevazione a potenza dei binomi servono di norma per la elevazione a potenza di tutti gli altri polinomi. Quindi, capitando spesso il bisogno di dover parlare dei binomi in genere, attesa la indicata importanza somma delle loro teoriche, giova averne una espressione la più concisa; ond' è che qualunque binomio il più complicato verrà da noi esposto sotto la semplice formola ora espressa, premettendo che da quì innanzi, parlandosi di binomi, sotto la denominazione di a, ovvero di 1ª *lettera*, intendiamo esprimere il 1° termine, e sotto la denominazione di c, o di 2ª *lettera*, intendiamo di esprimere il 2° termine di un binomio qualunque, quand' anche questi termini sieno composti di molti fattori, del coefficiente cioè e di molte lettere affette da diversi esponenti.

Elevazione dei binomi alla 2ª potenza ossia al quadrato.

201. Elevando a quadrato la somma di due termini, otteniamo (§.199)

$$\left.\begin{matrix}(+a+c)^2\\(-a-c)^2\end{matrix}\right\} = a^2+2ac+c^2.$$

Elevando poi a quadrato la differenza, otteniamo

$$\left.\begin{matrix}(+a-c)^2\\(-a+c)^2\end{matrix}\right\} = a^2-2ac+c^2$$

E da ciò conchiudiamo che il quadrato di un binomio ordinato rispetto alla stessa lettera per cui è ordinata la radice, risulta sempre di tre termini, cioè *del quadrato del 1° termine, del doppio prodotto del 1° nel 2°, e del quadrato del 2°; e tutti questi sono affetti dal segno +, se ambi i termini del binomio hanno lo stesso segno, sia il +, sia il —, se cioè si tratti di somma; e il solo doppio prodotto è negativo, se i termini del binomio hanno segni contrari, se cioè si tratti di differenza.*

202. Applicando l'esposto teorema a binomi composti di termini diversi, col sostituire ad a e a c i valori che il caso particolare ci offre, troviamo per es. che

$$(ax+mz)^2 = a^2x^2+2amxz+m^2z^2$$
$$(4a^2c+a^3)^2 = 16a^4c^2+8a^5c+a^6$$
$$(2am^2-3m)^2 = 4a^2m^4-12am^3+9m^2$$
$$(c^3+{}^a/_2)^2 = c^6+ac^3+a^2/_4$$
$$(a^2/_3+{}^3/_4)^2 = a^4/_9+a^2/_2+{}^9/_{16}$$
$$(x+{}^c/_2)^2 = x^2+cx+c^2/_4$$
$$(20+6)^2 = 400+240+36 = 676$$
$$(\sqrt{x}+c)^2 = x+2c\sqrt{x}+c^2$$
$$(\sqrt{m}+\sqrt{c^3})^2 = m+2\sqrt{c^3m}+c^3$$
$$(\sqrt{x}-{}^a/_2) = x-a\sqrt{x}+a^2/_4$$
$$(\sqrt{2}+5) = 2+10\sqrt{2}+25 = 27+10\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2}+{}^1/_2) = 2+\sqrt{2}+{}^1/_4 = {}^9/_4+\sqrt{2}$$

203. Dal teorema (201) scende pure la formola che ci dà in un modo generico la differenza che passa fra il quadrato di un numero qualunque e il quadrato del numero immediatamente prossimo di lui maggiore. Ed in vero chiamato n il 1°, $n+1$ è il 2°; e la differenza de' loro quadrati si avrà col sottrarre il quadrato del 1° cioè n^2 dal quadrato del 2° che è $(n+1)^2 = n^2+2n+1$; e sarà perciò $n^2+2n+1-n^2 = 2n+1$. Dunque $2n+1$ ossia *il doppio del dato numero, più 1, esprime la differenza che passa tra il suo quadrato e il quadrato del numero che immediatamente il segue nella serie dei numeri naturali* (a).

Elevazione de' binomi alla terza potenza o cubo.

204. Elevando a cubo il binomio *somma* otteniamo

$$(a+c)^3 = a^3+3a^2c+3ac^2+c^3$$
$$(-a-c)^3 = -a^3-3a^2c-3ac^2-c^3$$

(a) E siccome $2n+1 = n+(n+1)$ può anche dirsi che la somma di due termini progressivi esprime la differenza dei loro quadrati. Così la differenza tra il quadrato di 4 e il quadrato di 5 è appunto 9, che tanto può dirsi essere il doppio di 4, più 1, quanto può dirsi esser la somma dei due numeri progressivi 4 e 5.

Elevando a cubo il binomio differenza, otteniamo

$$(a-c)^3 = +a^3-3a^2c+3ac^2-c^3$$
$$(-a+c)^3 = -a^3+3a^2c-3ac^2+c^3$$

Cosicchè conchiudiamo, che *il cubo di un binomio risulta sempre di quattro termini, cioè del cubo del 1° termine, del triplo quadrato del 1° termine nel 2°, del triplo del 1° nel quadrato del 2°, e del cubo del 2° termine: e tutti questi termini sono affetti dal segno stesso de' termini del binomio, quando ambedue l' hanno eguale, quando cioè trattisi di binomio somma; e sono alternativamente positivi e negativi i termini del cubo, quando i termini del binomio hanno segni contrari, quando cioè trattasi di binomio differenza:* essendo in tal caso affetti dal — solo que' termini che contengono le potenze impari di quel termine del binomio che è negativo.

205. Applicando il dimostrato teorema, ai casi particolari in cui a e c hanno diversi valori, troviamo che

$$(3f^3+4c^2)^3 = 27f^9+108c^2f^6+144c^4f^3+64c^6.$$

$$(2g^2-3g)^3 = 8g^6-36g^5+54g^4-27g^3.$$

$$\left(\frac{h}{2}+\frac{2g^2}{3h}\right)^3 = \frac{h^3}{8}+\frac{g^2h^2}{2}+\frac{2g^4}{2h}+\frac{8g^6}{27h^3}$$

$$\left(\frac{m}{3}-\frac{m}{9}\right)^3 = \frac{m^3}{81}-\frac{m^3}{729} = \frac{8m^3}{729}$$

$(20+2)^3 = 8000+2400+240+8 = 10648$. Ed in fatti $22^3 = 10648$.

206. Dallo stesso teorema scende pure la formola che ci mostra la differenza tra il cubo d' un numero qualunque n, e del numero che immediatamente il segue, cioè di $n+1$. Questa differenza infatti si ottiene sottraendo n^3 da $(n+1)^3$, ossia da n^3+3n^2+3n+1; e risultato di tal sottrazione è $3n^2+3n+1$. Dunque $3n^2+3n+1$, ossia *la somma di 1 più il triplo del dato numero, più il triplo del suo quadrato, è sempre la differenza che passa tra il cubo del dato numero e di quello che immediatamente il segue.* Così la differenza tra il cubo di 2, e di 3, cioè tra 8 e 27, è appunto 19, che nasce dalla somma di 1 col triplo di 2 che è 6, più il triplo del suo quadrato 4, che è il 12.

Innalzamento dei binomi a qualsivoglia potenza per mezzo della formola del binomio Newtoniano.

207. Moltiplicando per $a+c$ il cubo $(a+c)^3 = a^3+3a^2c+3ac^2+c^3$ risulta la *quarta potenza* di $(a+c)$: questa moltiplicando per $(a+c)$ ne risulta la quinta ec., cosicchè fatte le debite riduzioni ecco il quadro delle successive potenze di $(a+c)$ sino alla *settima*.

$$(a+c)^1 = a^1+c$$
$$(a+c)^2 = a^2+2ac+c^2$$
$$(a+c)^3 = a^3+3a^2c+3ac^2+c^3$$
$$(a+c)^4 = a^4+4a^3c+6a^2c^2+4ac^3+c^4$$
$$(a+c)^5 = a^5+5a^4c+10a^3c^2+10a^2c^3+5ac^4+c^5$$
$$(a+c)^6 = a^6+6a^5c+15a^4c^2+20a^3c^3+15a^2c^4+6ac^5+c^6$$
$$(a+c)^7 = a^7+7a^6c+21a^5c^2+35a^4c^3+35a^3c^4+21a^2c^5+7ac^6+c^7$$

208. Da questa tavola rileviamo di quante e quali parti sono costituite le diverse successive potenze di un binomio sino alla potenza 7ª. Incomodo però riescirebbe alla nostra mente il ritenere a memoria tanti distinti teoremi, quanti ne abbiamo circa la costituzione delle successive potenze, che sono tanto più cómplicate quanto più alto è il loro grado, come pur tediosa ci riescirebbe l' esecuzione di tante moltiplicazioni, quante ne occorrerebbero per giungere alle richieste potenze, passando per la trafila di tutte quelle che sono ad esse inferiori. A questi inconvenienti porge riparo l' utilissima formola inventata dal genio di Newton, la quale prestasi alla formazione di qualsinsi alta potenza di qualunque binomio, precisandoci di *quanti* e *quali* termini essa risulta. E questa formola importantissima che dal suo inventore

fu detta Binomio Newtoniano passiamo ora ad esporre o dimostrare.

209. Intanto dall' analitico esame del quadro ora esposto rileviamo, che il numero dei termini di qualunque potenza sino alla settima supera di 1 il grado della potenza stessa; e rileviamo pure *quali* essere debbano essi, stabilendo le seguenti regole relative a ciascuno degli elementi di cui ogni termine risulta.

Regola per i segni.

210. L' esposto quadro non contempla che il solo *binomio somma di termini positivi*, e ci mostra, che tutti affetti dal $+$ sono i termini di qualsiasi potenza. È poi ben facile il conoscere che se il binomio fosse *somma di termini negativi*, tutti affetti dal $+$ risulterebbero i termini delle potenze pari, tutti affetti dal $-$ i termini delle potenze dispari. Quindi conchiudasi, che *le potenze pari del binomio somma hanno tutti i loro termini indistintamente affetti dal $+$; e le potenze dispari hanno tutti i termini affetti dal segno dei termini della radice.*

211. Nel *binomio differenza* poi (in cui secondo il costume teniamo per fermo che il termine positivo sia espresso da a, e sia posto per primo), avviene che i *termini delle successive potenze sieno alternativamente affetti l' uno dal $+$ l' altro dal $-$, essendo del segno $-$ forniti tutti que' termini, in cui esistono le potenze dispari di quella delle due lettere, che trovasi affetta dal $-$.*

Regola per le lettere.

212. In tutti i termini della sviluppata potenza del binomio $(a+c)$ esistono a e c moltiplicate una per l' altra, poichè se manca c nel 1° ed a nell' ultimo termine di qualsiasi potenza, come rilevasi nella tavola (§.207) per un utile uniformità, intendiamo che vi sieno elevate alla potenza zero (§.194).

Regole per gli esponenti.

213. Per poco che si tenga dietro allo andamento degli esponenti di cui sono forniti i termini delle successive potenze, eccone gli interessanti rilievi.

I. Nel primo termine dello sviluppo l'esponente di a (primo termine del binomio) è lo stesso esponente m cui devesi innalzare tutto il binomio; e va scemando di un grado di termine in termine successivo sino a divenire zero nell' ultimo.

II. L' esponente di c (secondo termine del binomio) va poi al contrario con ordine inverso, è cioè *zero* nel primo termine dello sviluppo, e va di termine in termine aumentando di un grado, finchè giunge ad essere nell' ultimo termine lo stesso m che a aveva nel primo.

III. Perciò tutti i termini dello sviluppo sono omogenei, è cioè sempre eguale in ciascun di essi la somma degli esponenti di a e c, somma che è sempre lo stesso esponente m della potenza cercata; poichè quando a possiedo m per esponente, c ha per esponente *zero*; e ne' termini successivi cresce l' esponente di c di quanto scema l' esponente di a, cosicchè in tutte le potenze esposte nel quoto, ecco l' ordine con cui compariscono nei successivi termini le potenze di a, e c.

$$a^m c^0,\ a^{m-1}c^1,\ a^{m-2}c^2,\ a^{m-3}c^3 \ldots a^0 c^m.$$

IV. E siccome all' esponente m, che nel primo termine dello sviluppo risiede in a, si comincia a togliere 1 nel 2° posto, 2 nel 3°....., $n-1$ perciò nel posto *ennesimo*; e siccome sempre l' esponente c è espresso da ciò che viene tolto all'esponente m di a nel termine stesso, dobbiamo avere in qualsiasi termine *ennesimo* di tutte le esaminate potenze $a^{m-(n-1)}c^{n-1}$.

V. Finalmente i termini di qualunque potenza come ce li presenta la serie sopra espressa, e la tavola (207) costituiscono un polinomio *ordinato* rispetto alla lettera a, mentre il costituirebbero ordinato riguardo alla lettera c, se fossero scritti in ordine retrogrado.

Regole per i coefficienti.

214. Bene analizzando la legge con cui in ciascuna delle potenze esposte (§.207) procedono i coefficienti, troviamo che *il coefficiente del primo*, ed *ultimo termine dello sviluppo* è 1: e il *coefficiente di ogni altro termine è sempre il coefficiente del termine anteriore moltiplicato per l' esponente che ivi a possiede, e diviso pel numero d'ordine dello stesso termine antecedente*, di modo che applicando questa regola alla formazione del coefficiente del 2° termine, troviamo essere $1 \cdot m/1 = m$: applicandola poi alla formaziono dei susseguenti, troviamo pel terzo $m(m-1)/2$, ec. Ed ecco la

serie dei coefficienti dei successivi termini delle esposte potenze.

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\ \ldots$$

Così, fatto $m = 7$, ecco i coefficienti della potenza settima di $a+c$

$$1,\ 7,\ \frac{7.6}{2},\ \frac{7.6.5}{2.3},\ \frac{7.6.5.4}{2.3.4},$$

$$\frac{7.6.5.4.3}{2.3.4.5},\ \frac{7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6},\ \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2.3.4.5.6.7}$$

e ci accorgiamo (togliendo i fattori esplicitamente uguali che trovansi nel numeratore e denominatore delle frazioni) che il coefficiente quinto è uguale al quarto (e sono questi i medii) il sesto al terzo, il settimo al secondo, l'ottavo al primo, troviamo cioè, come necessaria conseguenza delle regole della loro costruzione, eguali i coefficienti dei termini estremi, e dei termini che sono equidistanti da essi.

E poichè il numero dei termini di una potenza supera di 1 il numero che ne indica il grado (§.209) ne segue che nello sviluppo delle potenze di grado pari, in cui perciò il numero dei termini è dispari, allorchè siamo giunti alla formazione del termino medio, i coefficienti dei termini successivi sono i già trovati in ordine inverso, e nello sviluppo delle potenze di grado dispari, in cui perciò il numero dei termini è pari, quando siamo giunti ad ottenere il primo dei due termini di mezzo, che per essere equidistanti dagli estremi sono eguali, i coefficienti dei termini seguenti sono i trovati presi come sopra.

215. Con queste regole relative ai *segni*, *lettere*, *esponenti e coefficienti*, senza passare per la trafila di quelle successive moltiplicazioni che abbiamo eseguite per ottenere il quadro (§.207) tosto sviluppiamo i termini tutti di qualunque delle ivi esposte potenze, e non unicamente del *binomio somma positiva* $(a+c)$ il solo contemplato nel quadro ora citato, ma del *binomio somma negativa* $(-a-c)$, e del *binomio differenza* $(a-c)$, i di cui sviluppi non differiscono che nel semplice segno, alla determinazione del quale valgono le regole (§. 210 e 211). E precisato così il segno che debbe ad ogni termine competere, *si scrive il primo termine dello sviluppo, che è sempre* a^m (§. 213. III) *: si forma poscia ogni altro termine*, modificando gli elementi del termine antecedente, cioè *moltiplicando il coefficiente del termine antecedente per l'esponente che ivi possiede* a, *e dividendo il prodotto pel numero indicante il posto dello stesso termine antecedente, e accanto a questo quoto ponendo* a *coll' esponente diminuito di* 1, *e* c *coll' esponente accresciuto di* 1.

216. Così, volendo lo sviluppo di $(a+c)^5$, ecco la formazione di ciascuno dei termini suoi.

Il I. è $\times a^5c^0$, ovvero a^5

Il II. è ${}^{1.5}/_1 \times a^4c^1$, ovvero $5a^4c$

Il III. è ${}^{5.4}/_2 \times a^3c^2$, ovvero $10a^3c^3$

Il IV. è ${}^{10.3}/_3 \times a^2c^3$, ovvero $10a^2c^3$

Il V. è ${}^{10.2}/_4 \times a^1c^4$, ovvero $5ac^4$

Il IV. è ${}^{5.1}/_5 \times a^0c^5$, ovvero c^5

E che qui abbia fine lo sviluppo, ne siamo avvertiti dalla stessa regola o formola, poichè proseguendo ad applicarla al termine seguente, ci dà zero per risultato: infatti il coefficiente del settimo termine risulta dal coefficiente del sesto che è l'unità moltiplicata per l'esponente di a nel termine stesso, esponente che è zero, e che perciò zero rende il prodotto di qualunque quantità venga per esso moltiplicata.

Riunendo ora tutti i termini ottenuti con questa regola, abbiamo $(a+c)^5 = a^5 + 5a^4c + 10a^3c^2 + 10a^2c^3 + 5ac^4 + c^5$, sviluppo identico al prodotto ottenuto per mezzo delle successive moltiplicazioni nella tavola (§.207).

217. E se esprimiamo con m il numero indicante il grado della potenza cui vogliamo elevare $(a+c)$ cosicchè, operando giusta l'esposto metodo, avvenga che le operazioni prescritte dalle regole rimangano indicate, risulta la seguente formola.

Formola del Binomio Newtoniano

$$(a+c)^m = a^m + ma^{m-1}c + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}c^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}c^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}a^{m-4}c^4 + \ldots.$$

Quantunque però per mezzo di ripetute moltiplicazioni abbiamo noi portato bene innanzi il quadro delle successive potenze, essendo giunti sino alla settima (§.297): quantunque i diligenti allievi ne formeranno almeno altrettante, continuando le moltiplicazioni per $a+c$, e così (il quadro estendendo che le dimensioni della pagina non ci hanno permesso di protrarre più oltre) verificate vedranno le proprietà che abbiamo rimarcato, e le regole che vi abbiamo dedotte per molte potenze successive, pure potrà chiedersi se esse tutte poi andranno a verificarsi per potenze di grado indefinitamente più alto, se la m in somma della formola, che tutte quelle regole accoglie ed esprime, debba limitarsi a quel numero di potenza che abbiamo con la moltiplicazione ottenuto, o indicar debba un *numero qualunque*. Ora che tutto lo esposto si verifichi per qualunque potenza m, se l'analogia ne *induce* a crederlo, ne lo *obbliga* poi la seguente dimostrazione.

218. Esprima m non un numero qualunque, ma solo quel grado di potenza che siamo giunti ad ottenere con le successive moltiplicazioni, sicchè niun dubbio cada sulla verità della formola (§.217). Questa si moltiplichi per $(a+c)$, ed è chiaro che il primo membro diventerà $(a+c)^m(a+c) = (a+c)^{m+1}$; ed il secondo diventerà ciò che la moltiplicazione giusta le regole dei polinomi (§. 53) qui sotto eseguita ci esprime.

$$(a+c)^m = a^m + ma^{m+1}c + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}c^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}c^3 + \dots$$

$a+c$ (moltiplicatore)

$$(a+c)^{m+1} = a^{m+1} + ma^m c + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-1}c^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-2}c^3 + \dots$$

$$+ a^m c + ma^{m-1}c^2 + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}c^3 + \dots$$

$$(a+c)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)a^m c + \underset{(*)}{\frac{(m+1)m}{2}}a^{m-1}c^2 + \underset{(**)}{\frac{(m+1)m(m-1)}{2.3}}a^{m-3}c^3$$

Ora in tutti que' casi particolari nei quali è dimostrato vero lo sviluppo di $(a+c)^m$ è vera pure la equazione che abbiamo ora ottenuto; poichè la potenza $(a+c)^{m+1}$ si ottiene appunto moltiplicando di nuovo per $(a+c)$ la potenza $(a+c)^m$ siccome abbiam fatto. Ma gli stessi identici termini che costituiscono la potenza $(m+1)$ del binomio $(a+c)$ si ottengono, come può ognuno verificare, se si sostituisca $(m+1)$ ad m nella formola del binomio Newtoniano: dunque le regole dimostrate vere per la poten-

(*) Ad oggetto di facilitare agli Allievi non ancor bastantemente esercitati nel calcolo la esecuzione delle necessarie indicate riduzioni, ne piace non essere avari del seguente sussidio.

Ecco come risulta il coefficiente del terzo termine nell'equazione prodotta dall'ora eseguita moltiplicazione per l'addizione dei coefficienti dei termini simili soprapposti

$$\frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{m(m-1)+2m}{2} = \frac{m(m-1+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(m+1)m}{2}$$

(**) Ed ecco come risulta il coefficiente del quarto termine della somma dei coefficienti dei due termini simili soprapposti

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)(m-2)+m(m-1)3}{2.3} = \frac{m(m-1)(m-2+3)}{2.3}$$

$$= \frac{m(m-1)(m+1)}{2.3} = \frac{(m+1)m(m-1)}{2.3}$$

za del grado m, l'attual teorema dimostra che sene vere pur anche per la potenza $(m+1)$. Ma queste regole si sono dimostrate vere per alcune poche successive potenze di $(a+c)$ (e dalla 2ª alla 7ª nel nostro quadro); giacchè tutte si sono esse ottenute per mezzo delle successive moltiplicazioni, ed è appunto dalle indagini fatte sulla natura e andamento dei termini delle medesime che quelle regole si sono dedotte: dunque verificandosi esse, e quando m è 2, e quande è 3.... e quando nel nostre quadro m è 7, deggiono verificarsi anche quando il grado è $(7+1)$ ossia per la potenza *ottava*: e verificandosi le regole per la potenza ottava, verificarsi deggiono pure in grazia dell' ora esposto teorema per la potenza $(8+1)$ ossia per la *nona*, e così di seguito per le potenze espresse dai successivi numeri della serie naturale indefinitamente protratta.

La formola dunque del *binomio di Newton* (§.217) è dimostrata vera per qualunque valere di m. (*a*).

* 219. Passando perciò a desumere da questa formola la formola che ci precisi il valore di un termine qualunque, detto perciò *termine generale*, o *terzo*, o *quarto*, e *quinto*, *o ennesimo* per la potenza del grado m, ora che m non è più limitato, perchè può essere un numero qualunque, siamo certi che questa formola del termine generale debba verificarsi per una potenza qualsiasi.

Per ottenerla convien rammentare aver già osservato (§.213.IV) essere la quantità letterale del termine ennesimo genericamente espressa da $a^{m-(n-1)}c^{n-1}$. Non resta perciò a trovarsi che l'espressione generica del suo coefficiente. Questa si deduce dalla formola del binomio Newtoniano, facendovi i seguenti rimarchi. Iª In ogni termine (escluse il prime ove il coefficiente è sempre 1, ed escluso il secondo ove il coefficiente è sempre m) il coefficiente viene presentato sotto una forma frazionaria. IIª Il numeratore del coefficiente di qualunque termine è sempre costituito da una serie di fattori successivamente decrescenti di una unità, quali sono, m, $m-1$, $m-2$....; ed essendo $m-1$ l'ultimo fattore del numeratore del 3° termine; essendo $m-2$ l'ultime fattore del numeratore del 4ª, ec. essendo cioè quest' ultimo fattore in ogni termine espresso da m meno il numero indicante il posto diminuito di 2, segue che in qualsiasi posto *ennesimo* l'ultimo fattore del numeratore del coefficiente è sempre $m-(n-2)$. IIIª Il denominatore del coefficiente di qualunque termine risulta di fattori successivamente crescenti di una unità, e sono 2, 3, 4.....; e poichè dalla formola del binomio si ha che nel 3° posto l'ultimo fattore del denominatore è 2, nel 4° è 3...., ne segue che in qualsiasi posto ennesimo sia $n-1$. Ed ecco la formola che in seguito dei fatti rimarchi risulta pel termine generale ennesime di qualunque potenza.

$$(O)...\frac{m(m-1)(m-2)....(m-(n-2))}{2.3.,.(n-1)}a^{m-n+1}c^{n-1}$$

(*a*) La moltiplicazione eseguita per passare dalla potenza di grado m alla potenza $(m+1)$ ci fa conoscere come la costruzione dei coefficienti numerici d' una potenza possa con ogni facilità dedursi da quelli della potenza immediatamente inferiore. Risulta infatti ad evidenza che (dopo il primo termine il cui coefficiente è 1 in tutte le potenze) il coefficiente del 2° termine nella potenza $(m+1)$ è formato dalla somma dei coefficienti del 1° e 2° termine della potenza m, il coefficiente del terzo dalla somma del 2° e 3° della potenza m ec., e in generale il coefficiente del termine *ennesimo* della potenza $(m+1)$ è dato dalla somma dei due coefficienti che trovansi nel rango $(n-1)$ e nel rango n della potenza m.

Questa osservazione ci permette di formare colla massima sollecitudine i coefficienti di tutti i termini d' una potenza qualunque, desumendoli per semplice addizione dai coefficienti della potenza immediatamente inferiore, facendo la somma di due dei suoi coefficienti esistenti in due ranghi prossimi, lo che tosto otteniamo, se scriviamo in una prima linea i coefficienti di una potenza m nell' ordine loro naturale, e in una seconda linea i coefficienti stessi, ma in modo che il 1° stia sotto il 2°, il 2° sotto il 3°, ec. della linea prima. Addizionando infatti i numeri che sono in ciascuna colonna verticale, abbiamo nelle rispettive somme i coefficienti ordinati della potenza $m+1$. Ed eccone esempi.

Coefficienti della potenza 2ª
$$\begin{cases} 1+2+1 \\ \quad 1+2+1 \end{cases}$$
Coefficienti della 3ª $\quad 1+3+3+1$

Coefficienti della potenza 3ª
$$\begin{cases} 1+3+3+1 \\ \quad 1+3+3+1 \end{cases}$$
Coefficienti della 4ª $\quad 1+4+6+4+1$

ec. . . . .

* 220. Con questa formola possiamo tosto, senza passare per la trafila dei termini antecedenti ottenere in qualsiasi potenza, per es. nella settima, un termine qualunque, e per es. il 6°. Infatti volendosi il sesto termine, l'ultimo fattore $m-(n-2)$ del numeratore del coefficiente è nel caso nostro $7-(6-2)=3$: l'ultimo fattore $n-1$ del denominatore del coefficiente stesso è $6-1=5$, e perciò sostituendo nella formola (O) ad n *il* 6 otteniamo subito

$$\frac{7.6.5.4.3}{2.3.4.5}a^2c^5 = 21a^2c^5$$

* 221. Con la (O) possiamo tosto ottenere la formola esprimente il *termine medio a coefficiente massimo* di qualsiasi potenza pari. Basta per tale oggetto porre mente che questo termine di mezzo trovasi nel posto espresso da $^m/_2+1$, giacchè questo termine col numero $^m/_2$ dei termini che lo precedono, e col numero $^m/_2$ dei termini che lo seguono forma il numero totale $m+1$ dei termini dell'intero sviluppo. Sostituendo dunque $^m/_2+1$ ad n nella formola del termine generale, otteniamo

$$(P)\ldots\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(^m/_2+1)}{2.3\ldots ^m/_2}a^{\frac{m}{2}}c^{\frac{m}{2}}$$

* 222. Con questa formola generale possiamo tosto ottenere il termine medio di qualsiasi potenza pari, per es. della sesta sostituendo ad m il particolare valore che nell'esempio scelto è il 6.

Così veggendo che l'ultimo fattore $^m/_2+1$ del numeratore del coefficiente nel caso nostro è 4, e l'ultimo fattore $^m/_2$ del suo denominatore è 3, abbiamo tosto pel termine medio della potenza sesta

$$\frac{6.5.4}{2.3}a^3c^3 = 20a^3c^3$$

* 223. Per mezzo della formola (O) le formole possiamo pure ottenere dei *due termini medii a coefficiente uguale e massimo* di qualunque potenza di grado dispari. Il primo infatti dei due termini medii è l'ultimo della metà della serie di tutti i termini, ed è perciò nel posto $^{(m+1)}/_2$. Quindi sostituendo $^{(m+1)}/_2$ ad n, otteniamo il primo dei due medii espresso per

$$(Q)\ldots\frac{m(m-1)(m-2)\ldots^{(m+3)}/_2}{2.3\ldots^{(m-1)}/_2}a^{\frac{m+1}{2}}c^{\frac{m-1}{2}}$$

Dal primo poi discendo agevolmente la formazione del secondo termine medio. Infatti il coefficiente di questo, dovendo per la costituzione dei coefficienti essere il coefficiente del termine che immediatamente il precede, che è il medio primo con un ultimo fattore di più sì nel numeratore che nel denominatore, e dovendo quest'ultimo nuovo fattore nel numeratore decrescere di 1, e perciò essere $^{(m+3)}/_2-1 = {}^{(m+1)}/_2$; e nel denominatore superare di 1 l'ultimo fattore del termine antecedente ed essere perciò $^{(m-1)}/_2+1={}^{(m+1)}/_2$, ne segue che il novello coefficiente è il coefficiente del primo termine medio che lo precede moltiplicato e diviso per una medesima quantità; e perciò se diverso nell'aspetto, eguale ad esso è in valore. Il secondo dei due termini medii ha dunque un coefficiente uguale a quello del primo; e per rapporto agli esponenti delle lettere è chiaro (§.213) che l'esponente $^{(m+1)}/_2$ che possiede a nel primo debbe decrescere di uno nel secondo termine medio, e perciò diventa $^{(m-1)}/_2$, e l'esponente $^{(m-1)}/_2$ che possiede c debbe crescere di 1, e perciò diventa $^{(m+1)}/_2$. Quindi e che *il secondo dei due termini medii non è che il primo in cui siasi fatto baratto di esponente alle lettere*.

* 224. Quindi se si volessero i due termini medii della potenza settima, per es. di $a+c$, riflettendo che pel primo di essi, sostituito ad m il 7 nella formola (Q), l'ultimo fattore $^{(m+3)}/_2$ del numeratore del coefficiente diventa 5, e l'ultimo fattore $^{(m-1)}/_2$ del denominatore diventa 3, troviamo subito che

Il 1° dei medii è $\frac{7.6.5}{2.3}a^4c^3 = 35a^4c^3$

Il 2° dei medii è $\frac{7.6.5.4}{2.3.4}a^3c^4 = 35a^3c^4$

* 225. La formola (O) del termine ennesimo o generale (§.219) applicandosi a qualunque termine, debbe darci anche il penultimo, che nello sviluppo del binomio troviamo essere ac^{m-1}, e l'ultimo, che è c^m, qualora in essa venga alla n sostituita o la m che esprime il posto penultimo, ovvero $m+1$ che esprime l'ultimo posto, e gioverà agli Allievi verificare questi risultamenti.

226. Tutto ciò che si è rimarcato relativamente alla elevazione a potenza del binomio generico $a+c$ è applicabile a qualsivoglia particolare binomio, giacchè si per

a che per *c* intendesi un termine qualsiasi costituito da un coefficiente qualunque, e da qualunque numero di lettere affette da qualsiasi esponente. Quindi qualunque potenza può ottenersi di qualunque binomio, quando nella formola del binomio Newtoniano alla *m* si sostituisca il grado della voluta potenza, e nel nicchio di *a* e di *c* vengano collocati i valori particolari, che ci offrono il 1°, e 2° termine del dato binomio. Così
$(2mn^2+3r^3)^4 = (2mn^2)^4+4(2mn^2)^3(3r^3)^1$
$+{}^{4\cdot3}/_{2}(2mn^2)^2(3r^3)^2+{}^{4\cdot3\cdot2}/_{2\cdot3}(2mn^2)^1(3r^3)^3$
$+{}^{4\cdot3\cdot2}/_{2\cdot3\cdot4}(2mn^2)^0(3r^3)^4 = 16m^4n^8$
$+96m^3n^6r^3+216m^2n^4r^6+216mn^2r^9+81r^{12}$

ELEVAZIONE A POTENZE DI QUALUNQUE POLINOMIO.

227. Lo sviluppo delle potenze di un polinomio qualunque riducesi allo sviluppo delle potenze di un binomio, di modo che non esige che una continua applicazione delle regole stabilite per questo. Per brevità negli esempi dei polinomi ad elevarsi alle successive potenze, porremo termini tutti positivi, giacchè in que' casi nei quali v' è qualche termine negativo le regole esposte al (§.210) sono più che sufficienti per farci conoscere qual segno debba darsi ai termini nei successivi sviluppi.

ELEVAZIONE DEI POLINOMII ALLA SECONDA POTENZA OSSIA A QUADRATO.

228. I polinomii si elevano a quadrato con la massima facilità, ricorrendo ad un metodo che può dirsi graduatorio, tutto basato sull' artificio di trasformare in binomio un polinomio qualunque. Sia per es. $(f+g+h+i+\ldots)^2$. Per ottenere lo sviluppo di tutti i termini che costituiscono l' indicato quadrato di un polinomio di un numero qualunque di termini, partiamo dalla supposizione che debba elevarsi a quadrato non tutto il polinomio, ma la sola somma dei primi due termini. Avremmo in tal supposizione per risultato $f^2+2fg+g^2$. Passiamo ora alla supposizione di dovere alzare a quadrato la somma dei primi tre termini cioè $(f+g+h)$, e poichè niuno ci vieta di considerare $f+g$ come un termine solo corrispondente all' *a* del binomio generico, il trinomio $(f+g+h)$ trasformasi nel binomio qui sotto espresso

$$\big((f+g)+h\big):$$

Quindi il suo quadrato è

$$(f+g)^2+2(f+g)h+h^2,$$

e il suo sviluppo non richiede che l' esecuzione di regole tutte note. Ottenuto il quadrato del trinomio $(f+g+h)$, passiamo alla supposizione, che debba a quadrato elevarsi il quadrinomio $(f+g+h+i)$. E poichè niuno ci vieta di considerare $(f+g+h)$ come un termine solo, ecco così convertito il quadrinomio dato nel seguente binomio

$$\big((f+g+h)+i\big)$$

Quindi il suo quadrato è (§.201)

$$(f+g+h)^2+2(f+g+h)i+i^2$$

Ottenuto così il quadrato del quadrinomio si otterrebbe il quadrato di un *quinquenomio* riducendolo a binomio col considerare la somma dei primi quattro termini come un termine solo; e con simile legge si progredirebbe se il polinomio avesse ancora più termini, cosicchè conchiudere possiamo che nel quadrato di una radice polinomia qualsiasi esiste il quadrato del suo primo termine, esiste il quadrato del la somma dei suoi primi due termini, esiste il quadrato della somma dei suoi primi tre, dei suoi primi quattro termini ec; e ciascuno di questi quadrati successivamente nominati, cominciando dal quadrato del 1° termine è parte del susseguente, e nel susseguente quadrato si converte con una legge che prescrive doversi aggiungere ad esso il doppio prodotto della somma dei corrispondenti termini della radice pel termine prossimo, più il quadrato di questo stesso termine prossimo; sicchè per formare il quadrato di una radice polinomia qualunque, possiamo servirci della seguente graduata costruzione. *Si alza a quadrato il 1° termine della radice; il di lui doppio si moltiplica pel 2°: si alza a quadrato il 2°*; ed ecco in questo assieme il quadrato dei primi due termini della radice, ossia di tutti, se dessa è binomia. *Si aggiunge a questo quadrato il doppio prodotto della somma dei primi due termini moltiplicata pel terzo; e il quadrato del terzo*; ed ecco compiuto il quadrato dei primi tre termini della radice, ossia di tutti, se dessa è trinomia. *A questo quadrato si aggiunge il doppio prodotto della somma dei primi tre termini pel 4°, più il quadrato del 4°*, ed ecco compiuto il quadrato de' primi quattro

termini della radice, ossia di tutti se dessa è quadrinomia. E finalmente dopo avere ottenuto, così operando, il quadrato della somma di tutti i termini della radice meno l'ultimo, *aggiungendo a questo quadrato il doppio prodotto della somma di tutti i termini della radice meno l' ultimo, moltiplicata per l'ultimo, più il quadrato dell' ultimo, si ha il completo quadrato di tutta quanta è la polinomia radice*. Considerando in tal guisa il quadrato de' primi due, poscia dei primi tre, quindi dei primi quattro ec. termini della radice come il quadrato della prima parte d'un binomio, lo sviluppo del quadrato di un polinomio, sia pur complicatissimo, è sempre ridotto allo sviluppo di un binomio, e perciò non esigo che la replica delle medesime operazioni.

Così $(f+g+h+i)^2 = (f+g+h)^2 + 2(f+g+h)i+i^2$

E poichè sviluppando le parentesi nel 2^0 membro, otteniamo

$$(f+g+h+i)^2 = f^2+2fg+g^2+2fh+2gh+h^2+2fi+2gi+2hi+i^2,$$

chiaro apparisce che *il quadrato di un polinomio è la somma dei quadrati di tutti e singoli i suoi termini, più la somma dei prodotti a due a due di tutti i termini del polinomio moltiplicati per* 2.

Così p. es. $(2a^2+c^3+3h)^2 = 4a^4+4a^2c^3+c^6+12a^2h+6c^3h+9h^2$.

Così per es. $(300+20+4)^2 = 300^2+2(300.20)+20^2+2(300+20)4+4^2 = 104976$.

ELEVAZIONE DEI POLINOMII ALLA TERZA POTENZA OSSIA AL CUBO.

229. Ripetendo un ragionamento consimile a quello che si è fatto nella elevazione dei polinomii a quadrato, riflesso avuto alle parti che costituiscono il cubo di un binomio, ecco il metodo che ne deriva per alzare a cubo un polinomio qualunque. *Si alza a cubo il primo termine: si moltiplica il triplo quadrato del* 1^0 *pel* 2^0, *il triplo del primo pel quadrato del* 2^0, *e si alza a cubo il* 2^0 *termine*; o con ciò si ha il cubo della somma dei primi due termini della radice, ossia di tutta, se fosse binomia. *Al cubo della somma dei primi due termini* (considerato come cubo del primo termine a del binomio $a+c$) *si aggiunge il triplo quadrato della somma dei primi due moltiplicato pel terzo, il triplo della somma dei primi due moltiplicato pel quadrato del terzo, e il cubo del terzo termine*; ed ecco così compiuto il cubo della somma dei primi tre termini della radice e quindi di tutti, se dessa è trinomia, ec.

Così si ha $(2a^2+c^3+3h)^3 = (2a^2+c^3)^3 + 3(2a^2+c^3)^2 \times 3h + 3(2a^2+c^3)(3h)^2 + (3h)^3 = 8a^6+12a^4c^3+6a^2c^6+c^9+36a^4h + 36a^2c^3h+9c^6h+54a^2h^2+27c^3h^2+27h^3$

Così $(300+20+4)^3 = (300+20)^3 + 3(300+20)^2 \times 4+3(300+20)(4)^2+4^3 = 34012224$.

ELEVAZIONE DEI POLINOMII A QUALUNQUE POTENZA.

230. Abbiasi ad elevare alla potenza *emmesima* il polinomio $f+g+h+i+...$ Profittando del solito metodo di graduata costruzione, eleviamo prima alla potenza *emmesima* la somma dei soli primi due termini $f+g$, applicandovi la formola del binomio Newtoniano. Avendo la radice altri termini oltre i primi due, questa potenza emmesima dei primi due termini della radice può ora considerarsi come il solo primo termine a^m della formola del binomio Newtoniano, in cui la quantità $(f+g)$ corrisponde ad a, ed il 3^0 termine h corrisponde al 2^0 termine c; cosicchè all'ottenuto sviluppo che esprime $(f+g)^m$, ossia a^m, conviene ora aggiungere i termini che vengono dopo il primo a^m, badando bene di sostituire in ciascuno di essi la somma dei primi due termini $(f+g)$ ad a, e il terzo termine h alla c. Ciò che avremo così ottenuto, sarà lo sviluppo della potenza emmesima della somma dei primi tre termini della radice, e quindi di tutta, se fosse trinomia. Avendo però ancora più termini, il fin qui ottenuto non è che la potenza emmesima della somma dei primi tre termini della radice, la quale riguardiamo ora pel solo primo termine a del binomio; e perciò tutto lo sviluppo fin qui ottenuto non rappresenta che a^m, cioè il primo termine del binomio. Conviene perciò aggiungere alla lunga serie dei termini ottenuti, la quale non rappresenta che il solo a^m, tutti i termini dello sviluppo del binomio che vengono dopo il 1^0, badando bene di sostituire ad a la somma dei primi tre termini $(f+g+h)$ e a c il quarto termine i. E così di seguito operare conviene, finchè saremo finalmente giunti a

sostituire ad a la somma di tutti i termini del polinomio meno l'ultimo, ed a c l'ultimo termino.

231. Vogliasi per es. elevare alla quarta potenza il trinomio $(2+3+5)$. Applicandovi la formola del binomio Newtoniano, avremo

$$(2+3+5)^4 = (2+3)^4+4(2+3)^3(5) +6(2+3)^2(5)^2+4(2+3)5^3+5^4 = 10000.$$

Ed infatti $(2+3+5)^4 = 10^4 = 10000$. Il 10000 quarta potenza di 10 risulta dunque di tutte le 15 parti che costituiscono la quarta potenza del 10, quando al 10 si dia l'aspetto di trinomio, considerandolo come la somma delle tre parti $(2+3+5)$ che lo costituiscono.

E se allo stesso 10 si dà l'aspetto di quadrinomio, esprimendolo per $(1+2+3+4)$ troviamo 10000 sua quarta potenza costituito da tutte le 35 diverse parti componenti la quarta potenza di $(1+2+3+4)$.

Infatti $(1+2+3+4)^4 = (1+2+3)^4 +4(1+2+3)^3\times4 +6(1+2+3)^2\times4^2 +4(1+2+3)4^3+4^4 = 10000.$

IV. RISOLUZIONE DELLE POTENZE O ESTRAZIONE DELLE RADICI DEI POLINOMII.

232. Sull' analisi delle parti, di cui le diverse potenze do' polinomii risultano, tutta riposa la loro risoluzione, ossia la estrazione delle radici, di cui passiamo ora a tracciare le regole, avvertendo che, come senza far ricorso agli sviluppi in serie, le divisioni non possono eseguirsi che in que' polinomi che sono realmente il prodotto di una moltiplicazione in cui il divisore esiste come fattore, così le radici non possono trarsi che da que' polinomi che son realmente il risultato d' una elevazione a potenza.

ESTRAZIONE DELLE RADICI QUADRATE DEI POLINOMI ALGEBRICI.

233. Qualunque monomio alzato a quadrato o ad altra qualsiasi potenza, non produce che un sol monomio (§.178) e qualunque binomio elevato a quadrato produce necessariamente un trinomio (§. 201) il quale finchè è algebrico non può mai subire riduzione. È chiaro adunque che un binomio non può essere prodotto nè da una radice monomia, la quale dà un termine di meno, nè da una radice binomia, la quale dà un termine di più. Dunque un binomio può contenere il quadrato di un monomio, può far parte del quadrato di un binomio, ma esser non può un quadrato perfetto, e non può perciò da esso in conto alcuno trarsi radice. Così sebbene a sia la radice di a^2, e c di c^2, pur cadrebbe in errore chi credesse che $\sqrt{(a^2+c^2)}$ fosse $a+c$; poichè $a+c$ alzato a quadrato contiene oltre il dato binomio a^2+c^2 anche il termine $2ac$ (§.201). Quindi è che i meno complicati polinomi da cui può estrarsi la radice seconda sono i trinomi, e perciò da questi daremo principio.

Estrazione delle radici quadrate binomie.

234. Per estrarre dal quadrato $a^2+2ac+c^2$ la radice binomia che supponiamo di non conoscere, ragioniamo così. Il 1° termine del quadrato di un binomio ordinato, esser debbe il quadrato del 1° termine della radice (§.201): dunque prendiamo la radice del 1° termino a^2, cioè $+a$, e scriviamola a destra nel posto della radice sulla stessa linea in cui sta scritto il quadrato, come vedesi qui sotto

Quadrato	*Radice*
$a^2+2ac+c^2$	$+a+c$
$-a^2$	*Divisore*
Residuo $2ac+c^2$	$+2a+c$
$-2ac-c^2$	$+c$
0 0	

Si alzi a quadrato questo 1° termine della radice, e sottraggasi dal dato polinomio. Il residuo sarà $2ac+c^2$. E siccome il $2ac$ 1° termine del residuo è il 2° termine del dato quadrato, debbe esser perciò il doppio del 1° termine della radice moltiplicato pel 2°, che ancor non sappiamo cosa sia (§.201). Se però questo ignoto 2° termine della radice è fattore del prodotto $2ac$, di cui è dato l'altro fattore che è $+2a$ doppio del 1° termine, si otterrà tosto che si divida il $2ac$ per $+2a$, poichè serve appunto la divisione per trovare il fattore ignoto di un prodotto, di cui è dato l'altro fattore. Per ottener dunque questo 2° termine della radice, prenderemo il doppio del 1° termine $+a$, cioè $+2a$, che segneremo nel posto del divisore, e divideremo il $2ac$ per questo $+2a$, sicuri che il quoto $+c$ che risulta, esprime il se-

condo termine della radice richiesta, la quale sarà così interamente determinata. Per verificar poi se la ottenuta radice è esatta, dopo di aver scritto in 1° *luogo* il termine $+c$ accanto a $+a$ nel posto delle radici, si scrive in 2° *luogo* a destra del divisore $+2a$, e in 3° *luogo* al di sotto del divisore per facilitare all' occhio la esecuzione della moltiplicazione di $+2a+c$ per $+c$. Il prodotto che ne risulta e che esprime, come è chiaro, lo ultime due parti del quadrato del binomio $+a+c$, per sottrarlo, si scrive coi segni opposti al di sotto di $2ac+c^2$ residuo ottenuto per la sottrazione del quadrato del 1° termine della radice binomia dal di lei quadrato totale: e poichè fatta la riduzione, si ha zero di resto, si conchiude che nulla rimanendo del dato polinomio $a^2+2ac+c^2$ dopo di avervi sottratto tutte le parti del quadrato di $+a+c$, esso trinomio è il perfetto quadrato di $+a+c$, e quindi $+a+c$ è la sua esatta radice.

235. Avvertiamo però che non solo $(+a+c)$ ma ancora $(-a-c)$ esser può la radice del dato trinomio (§.210) ed avvertiamo anzi ora per sempre che nella estrazione delle radici quadrate non solo, ma di tutte le radici pari, ai termini delle radici può darsi un segno contrario a quello che loro si è attribuito per la ragione che la radice pari d' una quantità positiva è a rigore sempre affetta dal doppio segno. E se per render le formole meno complicate noi apponiamo ai termini il $+$ o il $-$ semplice, non tralasciamo di avvertire che apposto vi andrebbe il doppio; e che quando poi questo si appone ad un membro d' una equazione, non può certamente trascurarsi nell' altro. Così se avessimo $m^2 = a^2+2ac+c^2$, mal si farebbe se, estraendo la radice, si scrivesse

$$+m = \pm\sqrt{(a^2+2ac+c^2)} = \pm(a+c)$$

poichè scrivere si dovrebbe

$$\pm m = \pm\sqrt{(a^2+2ac+c^2)} = \pm(a+c)$$

236. Estrarre ora si voglia per es. la radice quadrata del polinomio $4r^6+9c^2-12cr^3$. Ecco il prospetto dell' operazione

Quadrato	*Radice*
$4r^6-12cr^3+9c^2$	$+2r^3-3c$
$-4r^6$	*Divisore*
$-12cr^3+9c^2$	$+4r^3-3c$
$+12cr^3-9c^2$	$-3c$
$0 \quad 0$	

Ordinato il polinomio rapporto alla lettera r, si estrae la radice dal 1° termine, e il risultato $+2r^3$ si segna nel posto della radice, e quindi proseguendo, come nell' antecedente esempio, si ottiene per total radice $+2r^3-3c$, la quale potrebbe essere anche $-2r^3+3c$, se si rifletta che potea scriversi nel posto delle radici per radice del 1° termine $-2r^3$ in vece di $+2r^3$. Questo cambiamento infatti porta nel processo del calcolo che il 2° termine della radice sia non il $-3c$, ma il $+3c$, poichè avendo scritto $-2r^3$ nel primo posto della radice, il suo doppio è $-4r^3$ e per $-4r^3$ dividendo $-12cr^3$, d' uopo è che il quoto risulti positivo e non negativo. E per esprimere che il secondo termine viene negativo quando il primo è positivo, e viceversa, si appone il doppio segno al primo, e il doppio segno rovesciato al secondo, scrivendo

$$\sqrt{(4r^6-12cr^3+9c^2)} = \pm 2r^3 \mp 3c.$$

237. Se il trinomio, da cui si vuole estrarre la radice sia frazionario, è chiaro (§.188) che conviene estrarla dal numeratore e denominatore. Così avremo

$$\sqrt{\frac{g^2-4gh+4h^2}{4g^2-4gh+h^2}} = \frac{g-2h}{2g-h}$$

$$\sqrt{\frac{a^2c^2+a^2c-a^2/_4}{a^2/_9+{}^{am}/_3+m^2/_4}} = \frac{ac+{}^a/_2}{{}^a/_3+{}^m/_2}$$

238. Quando il quadrato è un polinomio di soli tre termini, il processo eseguito per ottenerne la radice torna inutile, perchè ordinato che sia, la sua radice si ottiene subito prendendo la somma delle radici quadrate del 1° e del 3° termine, siccome chiaro risulta dalla costituzione del quadrato dei binomii: si è però eseguito, perchè ci fa strada al processo necessario a praticarsi quando il polinomio è di più termini.

Estrazione delle radici quadrate polinomie qualunque si intere che frazionarie.

239. Dall' analitico esame della costituzione dei termini componenti il quadrato di qualunque radice polinomia, (§. 228) fluisce spontaneamente il metodo che praticar si debbe per estrarre la radice quadrata da qualsiasi polinomio il più complicato.

Si abbia p. es. la quantità $2c^3p^2+c^6+4a^4-4a^2c^3+p^4-4a^2p^2$. Per estrarvi la radice quadrata eccone l' operazione

Quadrato	*Radice*
$4a^4-4a^2c^3-4a^2p^2+c^6+2c^3p^2+p^4$	$2a^2-c^3-p^2$
$-4a^4$	*Divisore*
I. Resto $-4a^2c^3-4a^2p^2+c^6+2c^3p^2+p^4$	$4a^2-c^3$
$+4a^2c^3 \quad -c^6$	$-c^3$
II Resto $-4a^2p^2+2c^3p^2+p^4$	$4a^2-2c^3-p^2$
$+4a^2p^2-2c^3p^2-p^4$	$-p^2$
$0 \quad 0 \quad 0$	

Si ordina primieramente il polinomio rispetto ad una lettera qualunque p. es. alla a, ond' esser certi, che il 1° termine sia il quadrato del 1° termine della sua radice. Si estrae la radice del 1° termine $4a^4$; e il $2a^2$ che si ottiene, è per conseguenza il 1° termine della radice cercata, che perciò segniamo al suo posto. Si alza questo termine a quadrato, e si sottrae dalla quantità proposta. Il $-4a^2c^3$, 1° termine dell' ottenuto residuo, è il 2° termine del dato quadrato, e quindi è il doppio del 1° moltiplicato pel 2° termine della radice, e ci darà perciò questo 2° termine della radice che cerchiamo, dividendolo pel doppio del 1°. Per tale oggetto duplichiamo il $2a^2$ primo termine della radice, segniamo il $4a^2$ che si ottiene nel posto del divisore, e per esso dividendo il $-4a^2c^3$, risulterà $-c^3$ che scrivesi nel posto della radice, accanto e sotto al divisore. Per questo $-c^3$ che è il 2° termine della radice si moltiplica tanto il doppio del 1° che il 2° termine stesso; e il risultato, per sottrarlo, si scrive coi segni opposti sotto i termini simili del 1° residuo su cui abbiamo operato, si fa la riduzione, e così si ottiene un II° *resto*.

In tal guisa dal proposto polinomio sottratte si sono le tre parti costituenti il quadrato de' primi due termini della radice, sicchè fatta la riduzione, nel II° *resto* che otteniamo debbe essere contenuto il doppio dell' assieme dei primi due moltiplicato pel 3°, e il quadrato del 3° termine della cercata radice. Sono infatti queste le parti che col già sottratto quadrato dei primi due termini costituiscono il completo quadrato dei primi tre termini della radice, quadrato che esiste nel quadrato d' ogni polinomio che ha più di due termini (§.228). Dividendo perciò questo resto pel doppio della somma dei primi due ottenuti termini della radice, risultar dovrà il 3° termine che cerchiamo. A tale oggetto si duplica la somma dei primi due termini della radice $2a^2-c^3$, e si ottiene $4a^2-2c^3$, che si scrive nella colonna dei divisori, cioè a destra del II *resto* che debbesi per esso dividere; e il quoto $-p^2$ che risulta dividendo il 1° termine $-4a^2p^2$ del II *resto* pel 1° termine $4a^2$ del nuovo divisore, è il 3° termine della radice, che si scrive, come il 2° in tre posti, cioè nel posto della radice a destra degli altri due termini, poi a fianco dell' attual divisore, e sotto. Quindi per questo 3° termine $-p^2$ si moltiplica tutto il $4a^2-2c^3-p^2$, per avere e il doppio prodotto de' primi due termini pel 3°, ed insieme il quadrato del 3° che col segno opposto (affine di sottrarli) si scrivono sotto il II° *resto*; e poichè per mezzo di tal sottrazione il II° *resto* viene interamente distrutto, conchiudiamo, che la quantità proposta è il quadrato di $2a^2-c^3-p^2$, poichè nulla resta di essa dopo che abbiamo da lei tolte tutte le parti costituenti il quadrato del trinomio $2a^2-c^3-p^2$; e per conseguenza $2a^2-c^3-p^2$ è la cercata radice. Che se un resto avanzasse, dovrebbe in esso esser contenuto il doppio della somma dei primi tre termini della radice moltiplicato pel 4° termine, e il quadrato del 4° termine, poichè son queste le parti che col già sottratto quadrato della somma dei primi tre termini formano il quadrato de' primi quattro termini della radice, quadrato che debbe esistere nel quadrato di ogni polinomio che abbia più di tre termini (§.228); e quindi per trarre fuori il 4° termine della radice converrebbe dividere il III° *resto* pel doppio della somma dei primi tre termini, e poscia proseguire le medesime operazioni. *Pel doppio in somma di ciò che operando si è già trovato in radice, convien dividere ogni resto che si va successivamente ottenendo*, finchè o si giunga a zero, il che accade in tutti i casi di quadrati perfetti, e ad un residuo non suscettibile d' ulterior divisione, il che accade in tutti i casi in cui i polinomi non sono

quadrati perfetti, ma contengono altri termini estranei al quadrato, a cui solo appartiene la estratta radice.

Se il polinomio è frazionario, conviene allora con questo metodo medesimo estrarre la radice sì dal numeratore che dal denominatore della frazione, e l'una per l'altra dividere.

ESERCIZI

$$\sqrt{(16a^4-40a^3p+25a^2p^2+64a^2pr-80ap^2r+64p^2r^2)} = 4a^2-5ap+8pr$$

$$\sqrt{(9m^4-12acm^3+28a^2c^2m^2-16a^3c^3m+16a^4c^4)} = 3m^2-2acm+4a^2c^2$$

$$\sqrt{\frac{4p^6+16p^3q^2+16q^4}{4a^2-4ac+c^2+4ag^2-2cg^2+g^4}} = \frac{2p^3+4q^2}{2a-c+g^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{4a^4+4a^3c^2+a^2c^4}{36}+\frac{2a^2c+ac^3}{3}+c^2\right)} = \frac{2a^2+ac^2}{6}+c$$

Estrazione delle radici quadrate dai numeri.

210. Riguardando le diverse unità collettizie di cui risultano i numeri como tanti termini di una quantità complessa, è ben chiaro che anche i quadrati dei numeri contengono le stesse parti di cui risultano i polinomi algebrici; e son perciò soggetti alle stesse regole di estrazione: so non che si esigono alcune avvertenze a motivo che nei numeri le diverse parti di cui risultano i quadrati non sono distinte come in Algebra, ma confuse e aggruppate insieme in un tutto.

211. Estrazione delle radici quadrate dei numeri espressi da non più di due cifre. Non vi sono regole per questa estrazione. Serve all'uopo la tavola del (§.177) per di cui mezzo, se il numero dato è nella serie de' quadrati che vi sono scritti, come per es. è 64, nella prima fila dei numeri semplici trovasi alla sinistra di esso la sua radice 8; e se il numero dato come per es. 70 non trovasi fra i quadrati che la tavola ci presenta, segno è che il numero 70 non è un quadrato: ma poichè rilevasi che esso è contenuto fra i due prossimi quadrati, 64, e 81, al primo dei quali corrisponde la radice 8, dicesi che 8 è la *radice prossima* di 70, ma notare è d'uopo che questa espressione è poco esatta, giacchè un numero o è radice, o non è; e nell'uno o nell'altro caso non le compete l'epiteto nè di prossima nè di remota, cosicchè è preferibile il dire che 8 è (non radice prossima di 70) ma *radice del prossimo maggior quadrato che è contenuto in* 70.

212. Estrazione delle radici quadrate dei numeri decadici aventi un numero pari di zeri. I decadici che hanno un numero impari di zeri non sono quadrati di alcun numero: non lo sono di numeri decadici, perchè qualunque numero decadico per sè moltiplicato dà per quadrato un altro decadico avente un numero di zeri doppio, e perciò *pari* e non impari: non di numeri non decadici; perchè qualunque numero non decadico dà un quadrato che è un numero non decadico (a). *Tutti i numeri de-*

(a) Per essere convinti che qualsiasi numero non decadico dà per quadrato un numero che non può mai essere decadico, notiamo prima di ogni altra cosa che se il prodotto di due fattori (cui sieno tolti, se ne banno, gli zeri finali) è un numero non decadico, prosegue ad esserlo ancora dopo che questi zeri sieno a loro resi, giacchè gli zeri finali che va perciò ad acquistare il prodotto, non producono alterazione veruna nelle cifre precedenti.

Ciò posto, notiamo ancora che dal processo stesso della moltiplicazione risulta che un prodotto di due fattori (cui sieno tolti gli zeri finali se ne hanno) per quanto sia di molte cifre composto, termina sempre con la cifra stessa con cui termina il prodotto dell'ultima cifra del moltiplicando per l'ultima del moltiplicatore. Ma risulta dalla tavola (§ 177) che qualunque cifra per se stessa moltiplicata dà un prodotto che termina con una cifra significativa, e non con zero: dunque il quadrato di qualsivoglia numero non decadico (spogliato degli zeri finali, se ne ha) termina con una cifra significativa. Or quest'ultima cifra significativa con cui ha termine il quadrato di un numero non decadico già privato degli zeri finali se ne aveva, o è cifra indicante numero, o è cifra indicante unità: se la cifra esprime un numero, dunque quand'anche non fosse da altre cifre preceduta, e le si aggiungessero pure zeri alla fine, il quadrato che la contiene non è

cadici poi con numero pari di zeri sono quadrati perfetti, le cui radici sono numeri decadici aventi la metà dei loro zeri. Così senza calcolo veggiamo tosto, che $\sqrt{100}$ è 10; $\sqrt{10000}$ è 100; $\sqrt{1000000}$ è 1000; e da questa proprietà derivano importanti conseguenze, che ci aprono la strada ai processi che praticar dobbiamo per la seguente operazione.

243. Estrazione delle radici quadrate da un numero qualunque. Primieramente fissiamo i limiti tra i quali sono comprese le radici di uno, di due, di tre, ec. cifre, così ragionando. Il 100 è il più piccolo numero che abbia una radice di due cifre, qual'è 10: dunque da *uno* al *cento* esclusivo si hanno numeri che hanno per radice una cifra sola. Il 10000 è il più piccol numero che abbia una radice di tre cifre, qual'è 100: dunque tra *cento* e *diecimila* esclusivo, son contenuti i numeri tutti che hanno la radice di due cifre. Il 1000000 è il più piccol numero che abbia una radice di quattro cifre, qual'è 1000: dunque fra *diecimila* e il *milione* esclusivo compresi son tutti i numeri che hanno la radice di *tre* cifre. Il 100000000 è il più piccol numero che abbia una radice di cinque cifre qual'è 10000: dunque fra il *milione* e il *centomilioni* esclusivo si contengono tutti i numeri che hanno la radice di *quattro* cifre, ec. E per dare a questa verità stessa una espressione più semplice, diciamo « *Hanno la radice di una cifra tutti i numeri che hanno non più di* 2 *cifre: hanno la radice di* 2 *cifre tutti i numeri che hanno non meno di* 3, *e non più di* 4 *cifre: hanno la radice di* 3 *cifre i numeri tutti, che hanno non meno di* 5, *e non più di* 6 *cifre: hanno la radice di* 4 *cifre quelli che hanno non meno di* 7, *e non più di* 8 *cifre, ec.* » Dal che risulta, che *il numero delle cifre della radice di un quadrato è la metà o del numero* n *delle cifre del quadrato, se questo numero è pari, o di questo numero accresciuto di* 1, *se è dispari;* è cioè $n/_2$ nel primo, è $^{n+1}/_2$ nel secondo caso; sicchè coll'osservare quante sono le cifre di un numero, rileviamo quante sono le cifre della sua radice o della radice del massimo quadrato che vi è contenuto.

244. Trattandosi di *numeri quadrati* notiamo inoltre che le loro radici proseguono *ad essere radici*, se loro in fine *si aggiungano tanti zeri quante paja se ne sono aggiunti ai loro quadrati*. Per es. essendo 6 la radice quadrata di 36, è 60 la radice quadrata di 3600. Infatti $\sqrt{3600}=\sqrt{(36\times100)} = \sqrt{36}\times\sqrt{100} = 6{,}10 = 60$. Essendo 53 la radice di 2809, è 5300 la radice di 28090000, poichè $\sqrt{28090000} = \sqrt{2809}\times\sqrt{10000} = 53\times100 = 5300$. (a)

245. Trattandosi poi di *numeri non quadrati* avvertiamo che *tante sono le unità costituenti la radice del maggior quadrato in essi numeri contenuto, e tante sono le decine della radice del maggior quadrato contenuto negli stessi numeri resi centupli*. Come per es. sono 5 le unità costituenti la radice del maggior quadrato contenuto in 35, così 5 e non più son le decine della radice del maggior quadrato contenuto in 3500. Infatti essendo $35>5^2$, ed essendo pure $35<(5+1)^2$, ne segue ancora che s'abbia

$$35\times100>5^2\times100$$

$$35\times100<6^2\times100$$

e quindi estraendo le radici

$$\sqrt{35\times100}>\sqrt{5^2\times100}>5.10>50$$

$$\sqrt{35\times100}<\sqrt{6^2\times100}<6.10<60$$

dal che rilevasi che la radice di 35.100, ossia di 3500 essendo maggiore di 50, e minore di 60, dee esser espressa dal 50 più un qualche numero di unità non maggiore di 9, sicchè verificasi che tante sono le decine della radice del maggior quadrato contenuto in 3500, quante erano le unità

---

un numero decadico: se poi l'ultima cifra del quadrato prodotto da un numero non decadico è l'unità, potrebbe questo quadrato con l'aggiunta degli zeri finali essere un numero decadico, qualora l'1 non fosse da altra cifra preceduto: ma ciò è impossibile perchè 1 non preceduto da altra cifra e seguito da zeri non può esser prodotto che dal solo 1 seguito da zeri, e non già da un numero non decadico: dunque un numero non decadico elevato a quadrato non può produrre un numero decadico sebbene sia 1 la sua ultima cifra dopo che gli sono stati tolti gli zeri finali. Dunque *un numero non decadico qualunque elevato a quadrato non può mai produrre un numero decadico, che è ciò che si volea dimostrare*.

(a) Ed in genere chiamando r il numero degli zeri che aggiungiamo alla radice, ossia il grado della potenza di 10 per la quale moltiplichiamo la radice, e quindi $2r$ il grado della potenza di 10 per la quale moltiplichiamo il quadrato, vediamo che come $\sqrt{m^2} = m$, così $\sqrt{10^{2r}\times m^2} = 10^r\times m$.

costituenti la radice del maggior quadrato contenuto in 35. E ciò pur si verifica anche allorquando nei ranghi occupati dagli zeri si trovino cifre significative, e sien pure le maggiori, quando cioè si avesse 3599 in vece di 3500; poichè l'aumento di tutto il 99 è minore di una sola unità dell'ordine prossimo a sinistra, cioè di un centinaio che è la quantità che per lo meno aggiunger conviene al numero dato perchè possa aver per radice una decina di più. Ed in vero nel nostro esempio il 3599 sta pur esso fra 50^2 e 60^2, ossia fra 2500 e 3600; cosicchè la sua radice pure star debbe fra 50 e 60; e perciò è sempre 5 la cifra esprimente le sue decine, siccome la era quando consideravasi il 3500 in vece del 3599. Con lo stesso ragionamento troviamo che come 22. per es. sono le unità che costituiscono la radice del maggior quadrato contenuto in 496; così 22 egualmente son le decine della radice del maggior quadrato contenuto in 49600 ed anche in 49699. (a)

246. Finalmente prima d'accingerci all'estrazione della radice quadrata da un numero qualsivoglia, essendo le diverse parti di cui risulta un quadrato numerico tutte insieme confuse in un numero solo, a differenza di quello che costituiscono i quadrati polinomi algebrici, procuriamo di scuoprire almeno i confini entro cui sono accolte; e a tale oggetto applichiamo per maggior chiarezza ad un caso particolare le nostre osservazioni, e per esempio al 3370896, che ottoniamo alzando a quaquadrato il 1836, radice che risguardata come risultante di tanti termini quante son le sue cifre, dir possiamo essere un quadrinomio composto di $1000+800+30+6$. E notiamo prima d'ogni altro che dall'esser 7 le cifre costituenti il 3370896, dedurre potremmo (se s'ignorasse) essere quattro le cifre costituenti la sua radice (§. 243). Poi riflettendo che il quadrato di un polinomio contiene il quadrato del 1° non solo, ma della somma dei primi *due*, della somma dei primi *tre* ec. termini (§.228) passiamo a rimarcare che mentre la somma di tutti i quattro termini di cui risulta la radice, in questo esempio è $1000+800+30+6$, ossia 1836, la somma dei soli primi *tre* termini cioè $1000+800+30$, ossia 1830 dee necessariamente per la mancanza dell'ultimo termine esprimente unità terminare con *uno* zero, e quindi con *due* zeri il di lei quadrato; cosicchè il quadrato della somma dei primi tre termini tutto è contenuto nelle unità collettizie, che sono al di dietro delle decine, e non ha parte alcuna di sè nel valore delle ultime due cifre della data 2^a potenza cioè del 96, che perciò segreghiamo per mezzo di una virgola. La somma dei primi *due* termini della radice, cioè $1000+800$, ossia 1800 termina con *due* zeri, e perciò con *quattro* il di lei quadrato; ond'è che questo tutto è contenuto nelle unità degli ordini che sono al di dietro delle decine di migliaia, e perciò non ha parte alcuna di sè nel valore delle ultime *quattro* cifre, cioè di 0896, che perciò per mezzo di un'altra virgola stacchiamo dal rimanente. Finalmente il 1° termine della radice cioè 1000 termina con *tre* zeri, e perciò con *sei* il suo quadrato; ond'è che questo tutto è contenuto nelle unità che sono al di dietro delle centinaia di migliaia, e non esiste con alcuna parte di sè nelle ultime *sei* cifre 370896 del dato numero; e queste perciò con una terza virgola separiamo.

Avendo così diviso il dato numero in *membri* o *periodi* di *due* cifre l'uno, cominciando da destra e proseguendo verso sinistra, ci avvediamo dunque che nel 1° membro a sinistra (che a differenza dogli altri esser può ancora d'una cifra sola, e ciò sempre succede quando la 2^a potenza ha un numero dispari di cifre come nel caso nostro) è contenuto il quadrato del 1° termine, nei primi *due* membri il quadrato della somma dei primi *due*, nei primi *tre*

(a) E finalmente in genere posto che m esprima il numero delle unità costituenti la radice prossima di a, m esprime pure il numero delle decine della radice prossima di $100a$. Ed infatti se m è radice prossima di a, ossia la radice del maggior quadrato contenuto in a, ne segue che

$$a > m^2,\ \text{e} < (m+1)^2$$
e quindi $$100a > 100m^2,\ \text{e} < 100(m+1)^2$$
donde $$\sqrt{100a} > 10m,\ \text{e} < 10(m+1)$$

lo che ci esprime che la radice di $100a$ ossia del massimo quadrato contenuto in $100a$, se ne sta fra un numero m di decine e il numero $m+1$ di decine immediatamente prossimo; ossia è tale quantità che contiene oltre il numero m di decine un numero di unità non maggiore di 9; e quindi che la stessa m che esprime il numero delle unità costituenti la radice di a esprime le decine della radice di $100a$, ossia della radice del massimo quadrato contenuto in $100a$.

membri il quadrato della somma dei primi *tre* termini ec. della radice; sicchè questa divisione in membri supplisce in parte alla real distinzione dei termini che abbiamo in Algebra, e quanti sono i membri nel numero proposto a quadrato, altrettanti sono i termini o cifre della radice.

247. Corredati di tali notizie circa la costituzione de' quadrati numerici, dopo di avere, come qui a lato, diviso in periodi il dato numero 3370896 a norma del §. 246, cominciamo l'estrazione col prender di mira il solo primo periodo costituito dal 3, come se del semplice 3 si trattasse. La radice prossima di 3 è 1 (§.241); e 1 si segni nel posto della radice. Si alzi a quadrato, e il risultato 1 sottraggasi dal 1° membro 3, e si avrà 2 di residuo, sicchè nella supposizione che il solo 3 sia la quantità da cui deve estrarsi la radice, dir dobbiamo che 1 è la radice prossima di 3 con 2 di resto.

```
3,37,08,06 | 1
2          |
```

A fianco del resto 2 abbassiamo ora il 2° membro 37, ed ecco che dal proposito di estrarre la radice dal solo 3 (1° membro) passiamo ora nello specchio posto qui a lato all'altro proposito di estrarre la radice dal 337, ossia dal numero costituito dai primi soli 2 membri che perciò aver deggiono una radice di 2 cifre (§.243).

```
3,37,08,96 | 18
237        | --
13         | 28
           |  8
```

Ora quel 3 prima cifra del 3370896 che nell'ipotesi antecedente era il solo numero di cui cercavasi la radice quadrata, nel proposito attuale in cui cercasi la radice quadrata di 337, radice che risulta di due termini, di decine cioè e di unità, ha acquistato un valore centuplo. Perciò quella stessa cifra 1 che segnata nel posto delle radici esprimeva la radice prossima di 3, ora esprimer debbe le decine della radice prossima di 300 ed anche di 337 (§.245); e passa infatti ad esprimer tosto che si faccia retrocedere d'un rango a sinistra col segnarvi alla sua destra la cifra indicante le unità della stessa radice di 337.

Intanto l'aver sottratto 1 quadrato di 1 dal 3, allorchè eravamo nel proposito di voler estrarre la radice dal solo numero 3, è stato (nel proposito attuale) un aver sottratto 100 quadrato di 10 (1° termine della radice di 337) da 300 (1° membro del 337) in cui tutto debba esser contenuto il quadrato del 1° termine della radice (§.246). [E il 200 residuo, che con l'aggiunta del 2° membro 37 diventa 237, contener debbe il doppio del 1° termine moltiplicato pel 2°, più il quadrato del 2° termine. E poichè il 1° termine 1 della radice quando essa risulta di 2 cifre non è 1 *unità semplice*, ma 1 *decina* ossia 10, così con uno zero deve pur terminare il suo doppio prodotto. Quindi è che non può questo aver parte alcuna di sè nell'ultima cifra 7 del 237, la quale perciò si separa per mezzo di un punto, ma tutto esser debbe contenuto nelle 23 decine. Se però il doppio prodotto delle decine nelle unità della radice è tutto nel 23, avvertiamo che oltre a ciò nel 23 stanno accolte ancora tutte quelle decine che nascono dall'alzare a quadrato le unità; ed altre decine ancora potrebbe il numero contenere oltre il quadrato massimo contenutovi, se esso non fosse un quadrato. Laonde come certi saremmo di ottenere il vero numero delle unità che si cercano col dividere il 23 pel doppio delle decine, se il 23 contenesse soltanto il doppio delle decine moltiplicato per le unità, così contenendo esso oltre a ciò altre decine, questa certezza ci manca, e può il quoto riescire un numero maggiore delle unità della radice, come appunto accade nel nostro caso. Questa divisione del 23 pel 2, doppio delle decine, va dunque riguardata non come un mezzo sicuro che ci rechi direttamente al suo fine, ma come tale che col recarci ad un risultato (che se non è il vero termine che ricerchiamo, gli è però assai prossimo) ci pone in grado di ottenerlo dopo pochissimi tentativi. Dividendo infatti lo 23 decine per le 2 decine doppio del 1° termine della radice, si ha 11 per quoto: ma noi certi d'altronde che le unità della radice non possono eccedere 9 (§. 245) proviamo se è 9 il loro numero; e per tale oggetto segniamo il 9 a fianco del 1° termine della radice, accanto al divisore, e sotto; e quindi moltiplichiamo il 29 per 9 onde ottenere insieme e 81 quadrato delle unità, e 180 doppio delle decine moltiplicato per le unità. Siccome però la somma di questi due parziali prodotti, cioè 261 è maggiore del residuo 237, in cui le ultime 2 parti del quadrato deggiono essere contenute, conchiudiamo che il 9 è troppo grande; e

perciò depennato il 9, poniamo a prova l' 8; moltiplichiamo perciò il 28 per 8 sostituito al 9; e poichè il prodotto 224 è contenuto in 237, cosicchè da lui sottraendolo, si ha 13 di resto, conchiudiamo che 8 è il vero 2° termine esprimente le unità della radice, e che quindi 18 è la radice del maggior quadrato contenuto in 337 con 13 di resto: dall' operato infatti risulta che in 337 sono contenute le parti tutte costituenti il quadrato di 18, e non già quello che costituiscono il quadrato di 19.

248. Or dal proposito di estrarre la radice dal 337 passiamo all' altro di estrarla dal 33708, ossia dal 337 seguito dal 3° membro 08 del total numero preso di mira. Il numero dunque di cui ora cerchiamo la radice è tutt' altro che il 337: ma non per questo si creda che la estrazione di radice già fatta rapporto al 337 sia un' operazione inutile per l' attuale nostra ricerca. Infatti il 18 già segnato nel posto delle radici, e che esprime le 18 unità che sono radice prossima di 337, esprimere debbe le decine della radice prossima del 337 reso centuplo, ossia di 33700, ed anche di 33708 (§.245) e passa realmente ad esprimerle, quando alla sua destra si ponga una cifra, quella cioè che indicar debbo l' ultimo termine, ossia le unità della stessa radice di 33708, il quale risultando di 3 membri, debbe avere una radice di 3 termini o cifre (§.246). Il 13 residuo ottenuto allorchè abbiamo sottratto tutte le parti del quadrato di 18 da 337, esprime ora dopo l' aggiunta del 3° membro 08 non più 13 unità, ma 13 centinaja residuo risultante dalla sottrazione del quadrato della somma dei primi due termini 10+8, ossia del quadrato di 18 decine da 337 centinaja. E questo residuo 13 centinaja, ossia questo 1300 che coll' aggiunta del 3° membro 08 è divenuto 1308, debbe contenere il doppio dei primi due termini moltiplicato pel 3° più il quadrato del 3°, che sono le altre due parti che col quadrato della somma dei primi due termini, già sottratto, compiono il quadrato d' una radice trinomia (§. 228 e 239).

Ma anche il doppio della somma dei primi due termini moltiplicato pel terzo debbe avere uno zero alla fine, poichè la somma dei primi due termini nel nostro caso non è 18 unità, ma 18 decine ossia 180: dunque questo doppio prodotto non può aver parte alcuna di sè nell' ultima cifra 8 del 1308; e perciò per mezzo di un punto si separa anch' essa, affine di escluderla nella divisione, come vedesi praticato nello specchio qui a lato. Si prende quindi il doppio delle trovate decine della radice, il doppio cioè di 18 (che è 36) e per 36, che si scrive per 2° divisore accanto al 2° residuo 1308, si divide il 130; e il quoto 3 che si ottiene si scrive a fianco del 18 nel posto della radice, accanto al divisore 36, e sotto.

. . . . .	
3,37,08,96	183
	28
	8
23,7	363
130,8	3
219	

Si moltiplica quindi tutto il 363 per 3; e perchè sottraendo (mentalmente di mano in mano che si forma) il prodotto 1089 dal 1308, si ottiene di residuo 219, conchiudiamo che 183 è la radice del maggior quadrato contenuto in 33708, e v' è 219 di resto.

249. Finalmente dal proposito di estrarre la radice del 33708 passiamo all' altro di estrarla da tutto il numero preso di mira sul bel principio, cioè dal 3370896, ossia dal 33708 seguito dal 4°, ed ultimo membro 96. Per questa nuova ricerca, ripetendo ragionamenti simili agli ora esposti, ci avvediamo che con le fin qui eseguite operazioni noi abbiam già sottratto da tutto il numero il quadrato dei primi 3 termini della sua radice quadrinomia, quadrato che è tutto contenuto in 33703 centinaja, e che il residuo 219 centinaja più l' ultimo membro 96, cioè 21996 contener debbe il doppio della somma dei primi 3 termini moltiplicato pel 4°, più il quadrato del 4° termine (§. 239). Separata per ciò con un punto l' ultima cifra 6, si prenda, come può qui a lato osservarsi, il doppio della somma dei primi 3 termini noti della radice, cioè di 183, e per questo doppio che è il 366 scritto per 3° divisore a fianco del 21996, si divida il 2199, e il quoto 6, che si ottiene, si scriva nei tre soliti posti:

. . . .	
33,37,08,96	1836
23.7	28
	8
130.8	363
	3
2199.6	3666
	6
00000	

si moltiplichi quindi per 6 tutto il 3666; e poichè il prodotto mentalmente sottratto dal 21996 dà zero di resto, conchiudiamo che 1836 è la radice esatta di 3370896, poichè nulla ri-

mane di questo numero dopo che da lui si son tolte tutte le parti che costituiscono il quadrato di 1836.

Se il numero delle cifre della quantità da cui si vuole estrarre la radice fosse maggiore di quello offertoci dall' esposto esempio, l' operazione dovrebbe allora proseguirsi in simil guisa, uno alla volta abbassando accanto al residuo membri di due cifre, poichè *la radice completa di un numero passa sempre, come si è già rilevato, ad esprimere le decine della radice di un altro numero che non sia che il primo alla cui destra siensi aggiunte due cifre*.

250. Il numero preso ora ad esempio era un quadrato perfetto: ma raro è che un numero preso a caso sia tale; e quando non lo è, invece di aver zero per residuo finale, si ottiene un numero che esprime l' eccesso del numero dato sul maggior quadrato in lui contenuto, cui appartiene la trovata radice. Eccone qui a lato un esempio.

81,36,40,08,03	90201
003640	1802
	2
360803	180401
180402	1

Nella estrazione della radice del proposto numero osserviamo che zero è il residuo che si ottiene dalla sottrazione di 81 (quadrato del 1° termine 9) dal 1° membro, e quindi abbassato accanto a questo resto ch' è zero il 2° membro 36, e separata la cifra 6, resta 3 a doversi dividere pel doppio della radice ossia per 18; e poichè si ha zero per quoto intero di tal divisione, zero si segna alla radice, e quindi si abbassa a fianco del 36 il seguente membro 40, e dopo di aver separata con un punto l' ultima cifra 0, si divide il 364 pel doppio della radice 90, e colle solite regole si prosegue, ferma l' avvertenza di segnar sempre alla radice o una cifra significativa, o zero per ogni membro che si abbassi, sicchè di tante cifre la radice risulti, quanti sono i membri del numero dato finchè si giunga al finale residuo 180402, il quale costituisce l' eccesso del dato numero 8136400803 sovra il massimo quadrato di 90201, che è in lui contenuto.

251. Ma questo residuo è assai forte; e se per essere tale si dubitasse che per errore di calcolo segnata si fosse una radice più piccola, ed un resto più grande del vero, ad eliminar tale sospetto facile è il criterio che l' Algebra ci offre coll' avvertirci che *non è mai impossibile per eccedenza un resto se non supera il doppio della radice*. Ed infatti perchè il dato numero contener potesse il quadrato che ha per radice una sola unità di più di 90201, converrebbe che nel residuo finale che è 180402 (che esprime ciò che resta del numero dato dopo avervi tolto il quadrato di 90201) contenuto fosse il doppio della radice più 1 (§.203): ma 180402 non è che il doppio di 90201: dunque nel nostro caso manca a 8136400803 una unità perchè contener possa un quadrato che abbia per radice un numero maggiore di una unità del 90201: dunque il quadrato di 90201 contenutovi è il massimo: dunque 90201 è la radice prossima di 8136400803.

252. In seguito di tutte le indicate avvertenze ecco il pratico processo che dee tenersi nell' estrazione di qualunque radice quadrata numerica. *Si divide il dato numero in membri da 2 cifre l'uno, da destra cominciando verso sinistra: indi dal 1° membro a sinistra si estrae la radice, e si segna nel posto delle radici, e il suo quadrato si sottrae dal 1° membro. A destra del resto si abbassa il 2° membro, e separata con un punto l' ultima cifra, tutto il numero a sinistra del punto si divide pel doppio della trovata radice scritto come divisore al suo destro lato: il quoto si scrive accanto alla trovata radice, accanto al divisore, e sotto; e tutto il divisore più la cifra segnatagli a fianco si moltiplica per lo stesso quoto, e si sottrae mentalmente il prodotto dal 1° resto seguito dal 2° membro. Accanto al nuovo resto che si ottiene, si segna il 3° membro, e la stessa serie di operazioni continuasi, abbassando a destra dei successivi residui un membro alla volta sino all' ultimo, sul quale operando, o non si ottiene residuo, e il proposto numero è allora esso stesso un quadrato, o si ha un residuo, ed allora il proposto numero non è un quadrato: e l' ottenuta radice appartiene al maggior quadrato che nel proposto numero è contenuto*.

253. Estrazione delle radici quadrate dai numeri frazionari. Se le quantità da cui debbe estrarsi la radice 2ª sono frazionarie, null' altra avvertenza occorre che quella di estrarre separatamente la radice dal numeratore e dal denominatore (§.188).

Così *esattamente*, perchè ambi i termi-

ni della frazione sono quadrati di numeri interi, abbiamo

$$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}$$

$$\sqrt{\frac{100}{121}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{121}} = \frac{10}{11}$$

Così *prossimamente*, perchè un solo termine delle seguenti frazioni è quadrato, abbiamo

$$\sqrt{\frac{26}{324}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{324}} = \frac{5}{18}$$

$$\sqrt{\frac{784}{845}} = \frac{\sqrt{784}}{\sqrt{845}} = \frac{28}{29}$$

Così *prossimamente*, perchè niuno dei termini delle frazioni seguenti è quadrato, abbiamo

$$\sqrt{\frac{17}{27}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{27}} = \frac{4}{5}$$

$$\sqrt{\frac{1371}{1602}} = \frac{\sqrt{1371}}{\sqrt{1602}} = \frac{37}{40}$$

Così per rapporto anche alle frazioni decimali notiamo che I. si ha *esattamente* (perchè ambi i termini della frazione sono quadrati) $\sqrt{0,01} = \sqrt{^1/_{100}} = {^1/_{10}} = 0,1$; $\sqrt{0,0001} = \sqrt{^1/_{10000}} = {^1/_{100}} = 0,01$; $\sqrt{420,25} = \sqrt{^{42025}/_{100}} = {^{205}/_{10}} = 20,5$: II. (perchè è quadrato un solo termine delle seguenti frazioni) si ha *prossimamente* $\sqrt{0,0226} = \sqrt{^{226}/_{10000}} = {^{15}/_{100}} = 0,15$; $\sqrt{230,4} = \sqrt{^{2304}/_{10}} = {^{48}/_{3}}$; $\sqrt{4,756} = \sqrt{^{4756}/_{1000}} = {^{234}/_{24}}$: e III. (perchè nè l'un nè l'altro dei termini della frazione che segue è quadrato) si ha *prossimamente* $\sqrt{0,2999825} = \sqrt{^{2999825}/_{10000000}} = {^{1732}/_{3162}}$.

254. Nelle frazioni decimali è poi cosa essenziale a notarsi, che *quando esse hanno un numero pari di cifre dopo la virgola, risulta una frazione decimale anche la loro radice:* non così se il numero delle cifre, dopo la virgola è dispari. Ed infatti quando è pari il numero delle cifre dopo la virgola, pari è al certo anche il numero degli zeri che ha il denominatore decadico della data frazione decimale: ed è perciò un quadrato, la di cui radice è un numero decadico anch'essa avente la metà dei suoi zeri (§.242) sicchè si ha il vantaggio di non far ricorso al calcolo per ottenerla; e se la radice che si trae dal denominatore è un numero decadico, siccome essa costituisce il denominatore della frazionaria radice, è ben chiaro che la radice è una frazione decimale. Al contrario quando è dispari il numero delle cifre dopo la virgola, dispari è il numero degli zeri del denominatore decadico, e quindi esso non è un quadrato: nè perciò decadica è la sua radice (§.242). E perchè essa costituisce il denominatore della radice frazionaria, la frazione radice non è decimale. Siccome però interessa moltissimo che le radici delle frazioni decimali sieno frazioni decimali anch'esse, così questo intento si ottiene col render pari in quelle frazioni, che non l'hanno, il numero delle cifre dopo la virgola per mezzo dell'aggiunta di uno zero, che il lor valore non altera. Così per es. dovendosi estrarre la radice della frazione decimale 51,9 ; se noi operiamo sulla frazione qual ci viene offerta, si ottiene allora $\sqrt{51,9} = \sqrt{^{519}/_{10}} = {^{22}/_{3}}$, radice che non è decimale: ma se vi aggiungiamo prima uno zero, abbiamo $\sqrt{51,90} = \sqrt{^{5190}/_{100}} = {^{72}/_{10}} = 7,2$. E da tutte queste osservazioni si trae la regola pratica, che *per estrarre la radice da una frazione decimale qualunque, sia vera, sia spuria, reso pari con uno zero, se non lo è, il numero delle sue cifre dopo la virgola, si estrae la radice dal suo numeratore riguardandolo come numero intero, e taglinsi tante cifre a destra, quante ne indica la metà del numero delle cifre dopo la virgola contenute nella proposta frazione*; poichè con questo taglio, a tenore della scrittura decimale, ad indicare veniamo il denominatore della radice.

255. Estrazione delle radici quadrate dai numeri interi per approssimazione. Un' utilissima applicazione delle teorie relative alle radici decimali, si ha nell'estrazione delle radici dei numeri per approssimazione.

Non essendo per esempio il 12 un quadrato, poichè contenuto fra 9 quadrato di 3, e 16 quadrato di 4, immediatamente prossimo a 3, diciamo che radice prossima di 12 è 3, e con ciò veniamo a riferire la radice non al 12, ma solo al 9, a quella parte cioè del numero 12 che è il maggior quadrato in lui contenuto (§.244). Se però non di 9, ma realmente di 12 noi cerchiamo la radice, veggendo

che 3 produce un quadrato minore, e 4 produce un quadrato maggiore di 12, conchiudiamo che la quantità che per sè moltiplicata dà 12, se v' è, sta fra il 3 ed il 4, e a questa radice, se esiste, avvicinarci quanto più ci piaccia possiamo, ottenendo risultati misti di intori e frazioni col semplice seguente artificio.

Se 4 è maggiore della vera radice di 12, il 3 non vi differisce di 1; ma se vogliamo che tal differenza sia anche minore p. c. di $^1/_8$, riduciamo 12 a frazione che abbia per denominatore il quadrato di 8 ossia 64; ed avremo $12 = {}^{768}/_{64}$, e quindi $\sqrt{12} = \sqrt{^{768}/_{64}} = {}^{27}/_8 = 3 + {}^3/_8$. Or se prossimamente la radice di 12 è $^{27}/_8$, noi abbiamo certezza, che questa radice non differisce dalla vera nemmeno di $^1/_8$, perchè se la vera radice di 12 superasse di $^1/_8$ il $^{27}/_8$, converrebbe che fosse $^{28}/_8$ cioè che 28 e non 27 fosse radice di 768; il che non può essere, poichè se 27 è la radice del maggior quadrato contenuto in 768, con ciò stesso diciamo che non vi è contenuto il quadrato che ha per radice 28. Ed intanto l' ottenuta radice $^{27}/_8$ ossia $3 + {}^3/_8$ veggiamo che è minore della radice di 12, ma però più le si accosta di quello che non le sia prossimo il semplice 3. Infatti $^{27}/_8 \times {}^{27}/_8 = 11 + {}^{25}/_{64}$ molto più prossimo a 12 di quello che non è $3 \times 3 = 9$. Se vogliamo una quantità che dalla vera radice di 12 non differisca nemmeno di una unità frazionaria decimale, sempre per comodità preferibile, e per es. di $^1/_{10}$, riduciamo il 12 a frazione che abbia per denominatore il quadrato di 10 che è 100, ed avremo allora $\sqrt{12} = \sqrt{^{1200}/_{100}} = {}^{34}/_{10} = 3,4$; e siccome questa radice non potrebbe essere 3,5 per le sovra indicate ragioni, è chiaro che la radice trovata 3,4 non differisce dal giusto d' $^1/_{10}$; e infatti $3,4 \times 3,4 = 11,56$ quantità che è di $^{271}/_{1600}$ più prossima al 12 che non è $11 + {}^{25}/_{64}$ prodotto dell' antecedente radice $3 + {}^3/_8$. E poichè le moltiplicazioni e divisioni per numeri decadici si ottengono senza processo di calcolo, ognun vede essere assai più utile per avvicinarci al giusto valore delle radici de' numeri che non sono quadrati di numeri interi, il convertirli in frazioni decimali e non in ordinarie; e così di fatto si pratica. Perciò se vogliamo ottenere un risultato che sia più vicino all' esatto valore della radice di 12 di quello che non è 3,4 che non vi differisce per $^1/_{10}$, troviamo un valore che non vi differisca per $^1/_{100}$ riducendo il 12 a frazione, che abbia per denominatore il quadrato di 100 ossia 10000, con che abbiamo $\sqrt{12} = \sqrt{12,0000} = 3,46$ (§.254) che non differisce dal vero di $^1/_{100}$ perchè 3,47 sarebbe troppo grande. Ed infatti $3,46 \times 3,46 = 11,9716$, quantità che dal 12 che dovrebbe prodursi, differisce assai meno di quello vi differiva $3,4 \times 3,4 = 11,56$.

Se vogliamo che la radice di 12 dal vero non differisca nemmeno di un millesimo, riduciamo il 12 a frazione avente per denominatore il quadrato di mille, ossia il milione, ed avremo in tal caso $\sqrt{12} = \sqrt{12,000000} = 3,464$; ed infatti abbiamo $3,464 \times 3,464 = 11,999296$ che differisce assai meno dal 12 di quello che vi differisca $3,46 \times 3,46 = 11,9716$. E in generale conchiudiamo che *per estrarre per approssimazione la radice dei numeri interi, loro si aggiungono tante paja di zeri, quante sono le cifre decimali che vogliamo nella radice, e quindi nella radice ottenuta col metodo* (§. 252) *si tagliano tante cifre a destra quante sono le paja dei zeri aggiunti* (§.254).

Così se per esercizio di calcolo trovar vogliamo la radice di 2, e di 3 espressa con 7 cifre decimali, onde assicurarci che dal giusto non differisca di un decimilionesimo, senza materialmente segnare 7 paja ossia 14 zeri a destra del 2 e del 3, si uniscono due alla volta ai successivi residui che si vanno ottenendo durante il processo, e si ottiene così per risultato $\sqrt{2} = 1,4142136$, e $\sqrt{3} = 1,7320508$ i quali valori non giungono a differire dal vero di un mezzo decimilionesimo, il 1° in più, ed il 2° in meno.

256. Ma più oltre spingendo l' operazione di quello che nei citati esempi si è praticato, è ben naturale che ci venga fatto di chiedere, se giungere si possa o non ad avere zero di resto, e quindi tal quantità decimale ottenere, che sia la esatta radice quadrata dei numeri che non hanno per radice un numero intero. Di tal quesito è facile la soluzione. Un prodotto non risulta d' altri fattori primi, che di quelli stessi di cui risultano il suo moltiplicando e il suo moltiplicatore. Quindi se i termini d' una frazione (o vera o spuria che sia) non hanno fattori comuni, nemmeno possono averli i loro quadrati, e le loro potenze in genere, non esistendo sì nel numeratore che nel denominatore di queste,

che gli stessi fattori del numeratore e denominatore della radice, sol che ripetuti. E ciò val quanto il dire che ogni frazione irriducibile ha necessariamente per potenza una frazione irriducibile. Ma (escluso le frazioni apparenti, che col ridurle cessano di esser frazioni) tutte le frazioni o vere o miste, se sono ancora suscettibili di riduzioni, divengono irriducibili quando sono recate alla menoma espressione: dunque tutte le frazioni che non sono apparenti, hanno per qualunque loro potenza una frazione irriducibile. Dunque non può darsi frazione vera o mista, che abbia per potenza un numero intero. Dunque *qualsivoglia numero intero non può essere potenza di una frazione, ossia non può avere una frazione per sua radice*. Dunque spingendo l'operazione anche all'infinito, non si troverebbe mai una frazione decimale senza resto che esser potesse radice d'un numero intero che non ha fra gli interi radice. *I numeri interi dunque che non sono potenze di numeri interi, ossia che non hanno fra essi radice, non potendola avere nemmeno fra le frazioni, è chiaro che non hanno radice*. Cercar dunque la loro radice è un cercar l'impossibile. Il $\sqrt{2}$, il $\sqrt{3}$ sono dunque simboli dell'inesistente, e perchè non è espresso per essi alcun rapporto o ragione (ratio), alcuna misura, sono detti *irrazionali* e *incommensurabili* (a).

E se essi ci accennano che la quantità che dovrebbe essere espressa per mezzo dell'unità di misura, cui *essi simboli si riferiscono*, non è esprimibile, chiaro ne sembra che dunque non esprimono quantità, o che sono perciò anch'essi *simboli di un impossibile*, come il sono le radici pari delle quantità negative. Tra queste due espressioni dell'impossibile v'ha però una rimarchevole differenza, ne crediate che un'alta metafisica si esiga per intenderla. Le radici dei numeri intori che fra gli interi non hanno radice, ammettono una quantità *reale* che elevata a potenza si approssima quanto più a noi piace a ciò che dovrebbe essere prodotto dall'irrazionale che non esiste, e soddisfa perciò approssimativamente in sua vece ai quesiti; e perchè queste radici irrazionali possono essere supplite approssimativamente da una quantità reale, diconsi *irrazionali reali*. Le radici pari al contrario delle quantità negative, non ammettono alcuna quantità reale che dia approssimativamente un risultato uguale a quella quantità negativa che prodotta si vorrebbe da una radice elevata a potenza pari, poichè si pretende in questi irrazionali che $+\times+$ ovvero $-\times-$ (che non è che un semplice diverso modo di esprimere il $+\times+$) dia per prodotto il $-$, si pretende cioè che il *porre produca il togliere*; al quale risultato non è mai possibile approssimarci con verun numero perchè l'effetto esige un'operazione opposta a quella che noi poniamo in esecuzione. Questi *irrazionali* perciò sono chiamati *immaginarii*. Il $\sqrt{2}$ non esiste, come non esiste $\sqrt{-1}$: ma se non v'è la radice di 2, v'è la radice di un numero quanto più ne aggrada prossimo al 2. Niuna quantità v'ha d'altronde che per sè moltiplicata dia un risultato che si approssimi al -1; poichè fra il porre e il togliere v'è una barriera che ogni approssimazione impedisce.

(a) Non esistono dunque quantità significate dai simboli detti irrazionali; ma poco logici sareste se da ciò credeste dedurre che non esistano le quantità irrazionali. Queste esistono, e sono uguali (approssimativamente però soltanto) non già a quantità espresse dai simboli irrazionali che non ne esprimono veruna, ma a certe quantità che sono le radici dei massimi quadrati contenuti in que' numeri la voluta radice dei quali è impossibile.

Per esempio preso il cateto per unità, l'ipotenusa è una quantità irrazionale, ed appunto è irrazionale, perchè $\sqrt{2}$ non esiste. Ed in vero se per brevità noi leggiamo la formola $I = \sqrt{2}$, che ci dà la Geometria, dicendo « L'*ipotenusa è uguale alla radice di* 2 » l'Algebra che ci ha dimostrato che $\sqrt{2}$ non esiste ci fa avvertiti dover dare a quelle parole questo significato « L'*ipotenusa sarebbe espressa da* $\sqrt{2}$, *se* $\sqrt{2}$ *esistesse* » Ed io non conosco qual precetto di Dialettica valga a far discendere dalla esposta proposizione il « *dunque* $\sqrt{2}$ *esiste* » come dall'esistenza dell'ipotenusa si farebbe discendere, posta per assoluta l'espressa uguaglianza. Però se la mente si addatta ad ammettere l'uguaglianza fra la quantità irrazionale I esistente, e il simbolo $\sqrt{2}$ inesistente, egli è perchè sostituisce alla radice di 2 che non esiste la radice di un numero che al 2 si approssima e non vi differisce che per una quantità trascurabile.

Riflettiamo però sempre che per quanto l'unità venga divisa in parti tenuissime, un tal numero possiamo di queste prendere, che ripetute tante volte per quante esse sono, diano un quadrato che a nostro bel grado vieppiù si approssimi al 2; ma il $\sqrt{2}$, ossia la quantità che ripetuta tante volte per quanto essa è, dia 2, si è qui sopra dimostrato impossibile. Dunque il segno $\sqrt{2}$ o le parole « *ra-*

257. Estrazione delle radici quadrate dai numeri rotti per approssimazione. Se trattasi di frazioni decimali, conviene tanti zeri aggiugnere, quanti ne *occorrono* perchè il numero delle cifre dopo la virgola sia doppio del numero delle cifre decimali che vogliamo nella radice. Così volendo la radice prossima in centesimi della quantità decimale 4,3, troviamo $\sqrt{4,3} = \sqrt{4,3000} = 2,07$ (§. 254). Se trattasi di frazioni ordinarie i termini delle quali non son quadrati, come è per es. $^{3}/_{5}$, si può estrarre la radice per approssimazione con tre diversi metodi. I. *Si trae per approssimazione la radice sì dal numeratore che dal denominatore, e quindi si divide realmente la* 1ª *per la* 2ª. Così $\sqrt{^{3}/_{5}} = {}^{1,732}/_{2,236} = {}^{1732}/_{2236} = 0,774$. II. *Si può risparmiare un' estrazione di radice riducendo un dei due termini della frazione a quadrato, col moltiplicarli ambedue per quello de' termini che vuol rendersi quadrato.* Così $\sqrt{^{3}/_{5}} = \sqrt{^{3\cdot3}/_{5\cdot3}} = \sqrt{^{9}/_{15}} = {}^{3}/_{38729} = {}^{30000}/_{38729} = 0,774$. Così $\sqrt{^{3}/_{5}} = \sqrt{^{3\cdot5}/_{5\cdot5}} = \sqrt{^{15}/_{25}} = {}^{3,8729}/_{5} = {}^{38729}/_{50000} = 0,774$. III. *Si può anche convertire prima in decimale la frazione ordinaria, e quindi estrarvi la radice.* Così $\sqrt{^{3}/_{5}} = \sqrt{0,6.} = 0,774$.

ESTRAZIONE DELLE RADICI CUBICHE DAI POLINOMI ALGEBRICI.

258. L' esame delle parti da cui è costituito il cubo di un binomio, e quindi di un polinomio qualunque ci suggerisce il metodo che convien praticare per la estrazione delle radici cubiche di qualsivoglia numero di termini; e che poniamo in esecuzione nel seguente esempio.

Cubo	$27a^3 - 54a^2c^2 + 36ac^4 - 8c^6$	$3a - 2c^2$ *Radice*
	$-27a^3$	*Divisore* $27a^3$
I. Resto	$-54a^2c^2 + 36ac^4 - 8c^6$	
	$+54a^2c^2 - 36ac^4 + 8c^6$	
II Resto	0 0 0	

dice di 2 » sono il segnale di un impossibile, perchè sono il segnale di due idee incompatibili. Quando diciamo « *radice* » diciamo quantità che debbe ripetersi tante volte quante sono le sue unità, diciamo perciò *numero*: e quando aggiungiamo « *di* 2 » veniamo ad aggiungere *che non può essere numero*, giacchè l' Algebra ci ha ora dimostrato che non v' è numero che possa essere radice di 2. Ma *numero che non può esser numero* è impossibile: dunque $\sqrt{2}$ non esiste; e ciò che non esiste non può essere nè prossimo, nè remoto a veruna quantità, nè può avere confini fra i qua'i esso esista, perchè dovrebbe esistere per averli. Quindi l'espressione comunemente usata che 1414 *millesimi è una radice più prossima alla vera radice di 2 di quello che sia 141 centesimi* » l' altra espressione « *che la radice di 2 sta fra* 1414 *e* 1415 *millesimi* » che perciò « *la radice* 1414 *millesimi non differisce dalla vera che per una quantità minore di un millesimo* » sono tutte improprie ed inesatte. Ed a queste abituandoci, a poco a poco, disponiamo, senza nemmeno accorgercene, la nostra mente ad accordare un' esistenza alla radice di 2, e dimenticando che non può esistere se non esiste in numeri; le accordiamo un' esistenza fra i confini prossimi di 14 e 15 decimi, fra i più prossimi ancora di 141, e 142 centesimi ec. Ma se queste espressioni improprie ci trascinano senza avvedercene a dare esistenza al non esistente, per non cadere in questo errore ben è che le abbandoniamo; perciò in vece di dire come si suole, e come ci era permesso prima di essere giunti a conoscere che la radice dei numeri che non sono potenze di interi non esiste, invece di dire « *che 1414 millesimi è la radice più prossima alla radice vera di 2 che non è 141 centesimi*, ben è che si dica che 1414 *millesimi è la radice di un quadrato* (*qual' è* 1,999396) *molto più prossimo al 2 di quello che sia* 1,9881, *quadrato di* 141 *centesimi*: in vece di dire che *la vera radice di 2 sta fra 1414 e 1415 millesimi* » ben è che si dica *che il 2 sta fra i quadrati di* 1414 *e* 1415 *millesimi* » che gli sono ben prossimi, e così sempre più stringere possiamo le pareti dello strettojo, fra le quali giacciono non le quantità sempre più prossime alla radice di 2, ma le radici dei numeri sempre più prossimi al 2.

Se i simboli irrazionali non esprimono quantità, non sono essi realmente suscettibili di moltiplicazione: quindi l'addurre la moltiplica degli irrazionali per irrazionali come prova che si dà moltiplicazione senza ripetizione, è un mettere in campo un errore per sostenerne un altro; giacchè nei così detti casi di moltiplicazione degli irrazionali tra loro è verissimo che non abbiamo ripetizione; ma non l' abbiamo, perchè non abbiamo reale moltiplicazione.

Circa poi alla esistenza geometrica accordata da Newton agl' irrazionali, leggi (Purgotti Lettere filosofiche *sugli irrazionali reali e immaginarii* pag. 439).

Ordinato il polinomio se non lo era, si estrae la radice cubica dal 1° termine (§.181) che si scrive nel posto della radice. Si forma il cubo di questo 1° termine della radice, e si sottrae dal proposto polinomio; e quindi riflettendo che nel 1° termine del resto che si ottiene deve contenersi il triplo quadrato del 1° termine moltiplicato pel 2° (§.229) onde ottenere il 2° termine della radice, dividesi tosto il 1° termino del residuo, cioè $-54a^2c^2$ pel triplo quadrato del 1° termino della radice, cioè per $27a^2$, che segnasi nel posto del divisore; e il quoto $-2c^2$ si scrive al posto della radice. Dal 1° resto del polinomio che contener debbe il triplo quadrato del 1° termine nel 2°, il triplo del 1° nel quadrato del 2°, e il cubo del 2° termine (§.229) si sottraggono queste parti; e poichè si ha zero di risultato, conchiudesi che il dato polinomio è cubo perfetto della segnata radice, ossia dessa è la radice cubica cercata. Che se si abbia invece un residuo, per esempio $+27a^2m-36ac^2m+12c^4m+9am^2-6c^2m^2+m^3$ (come avverrebbe nel caso che il polinomio da cui si dovesse estrarre la radice, fosse il dato, più i termini che abbiamo ora notato) la radice ha allora più di due termini; ed essendo già estratti i primi due, e tolto il loro cubo dal dato polinomio, conviene il resto dividere pel triplo quadrato dei primi due, affinchè il 3° termine risulti, che si trova essere $+m$; conviene quindi dal 2° resto sottrarre il triplo quadrato dei primi due termini pel 3°, il triplo de' primi due pel quadrato del 3°, e il cubo del 3° (§.229); e poichè ciò fatto nulla rimane, l'operazione è compiuta; e $3a-2c^2+m$ è la cercata radice. Che se un resto si avesse, converrebbe proseguir nello stesso modo il processo, finchè si giungesse ad un residuo o nullo o tale da non permettere ulteriore processo di calcolo.

Se il polinomio è frazionario, conviene estrarre la radice da ambi i termini della frazione, e dividere la radice del numeratore per quella del denominatore. Così

$$\sqrt[3]{\frac{8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3}{27c^3-27c^2x+9cx^2-x^3}}=\frac{2x-y}{3c-x}.$$

Questo metodo di estrazione delle radici cubiche dai polinomii ci fa strada a quello che debbe praticarsi su i numeri.

ESTRAZIONE DELLE RADICI CUBICHE DAI NUMERI.

259. ESTRAZIONE DAI NUMERI INTERI. Per fissare i limiti tra cui son comprese le radici cubiche di *una*, di *due*, di *tre* cifre, ec. notiamo che 1000 è il più piccol numero che abbia una radice di due cifre qual' è 10. Dunque da *uno* al *mille* esclusivo sono compresi tutti i numeri che hanno per radice terza *una* cifra sola, la quale si ottiene per mezzo della Tavola (§.177). Il 1000000 è il più piccol numero che abbia una radice di tre cifre qual' è 100: dunque dal *mille al millione* esclusivo son contenuti i numeri tutti, i quali hanno la radice di *due* cifre, come dal *millione al mille millioni* esclusivo tutti quelli che hanno la radice di *tre* cifre ec. E da ciò risulta, che il numero per es. 860085351 ha una radice cubica di tre cifre perchè compreso fra il milione e il mille millioni. E tale infatti è la radice 951 da cui l' 860085351 è stato prodotto col moltiplicarla due volte di seguito per sè stessa. Ora riflettendo che questa radice 951 è $900+50+1$, riflettendo che nel cubo totale debbe esistere il cubo delle prime due parti $900+50=950$; che il cubo di 950 ossia $950\times950\times950$ terminando con tre zeri, tutto è contenuto nelle unità che stanno al di dietro delle centinaia, e non può perciò aver parte alcuna di sè nello ultimo *tre* cifre verso destra del dato numero proposto a cubo, cioè in 351; riflettendo che il il 1° termine 900, avendo in fine *due* zeri attesa la mancanza degli ultimi due termini, il suo cubo $900\times900\times900$ debbe terminar con *sei* zeri, e perciò non può aver parte alcuna di sè, nelle ultime *sei* cifre 085351 del cubo proposto, conchiudiamo che per estrarre la radice cubica da un dato numero, convien dividerlo in *membri* di *tre* cifre da destra procedendo verso sinistra, e quanti sono i membri, altrettante sono le cifre della radice.

260. Ciò posto, vogliasi la radice cubica di 74088, numero che diviso in membri, come qui sotto, ci mostra che la sua radice è di due cifre.

Cubo	74,088	42 *Radice*
	64	48 *Divisore*
I. Resto	100 88	9600 . . . . . (A)
		480 . . . . . (B)
	100.88	8 . . . . . (C)
II. Resto	00000	10088 *Somma*

Nel 1° membro 74 debbe contenersi il cubo del 1° termine; e poichè il maggior cubo contenuto in 74 è 64 cubo di 4, segnasi 4 alla radice. Si sottrae 64 cubo di 4 dal 74, e a destra del resto 10 si abbassa il 2° membro: si separano le due ultime cifre 88 per mezzo d' un punto, e così siamo certi che in ciò che rimane a sinistra, cioè nelle sole 100 centinaia ò contenuto il triplo quadrato del 1° termine 4 *decine*, cioè di 40; poichè debbe esso necessariamente terminar con due zeri, siccome con due zeri termina il quadrato di qualunque decina, perchè prodotto di due fattori aventi ognuno uno zero in fine (*a*). Pel triplo quadrato del 1° termine 4 decine cioè per 48 centinaia si divide il 100, e così siamo certi che il quoto 2 che si ottiene è la vera radice, o un numero che la supera per poche unità; e perciò scritto in (A) il triplo quadrato del 1° termine pel 2° ossia il triplo quadrato delle decine per le unità, scritto in (B) il triplo delle decine pel quadrato delle unità, scritto in (C) il cubo delle unità, e fattane la somma, se questa è contenuta in 10088, cioè in quel 1° residuo che le dette parti deve contenere (come nel nostro caso accade in cui si ha zero di resto) la cifra 2 si segna accanto al 4 nel posto della radice, e se la somma di queste parti superasse il 1° resto, la cifra sarebbe troppo grande, e converrebbe esplorare un numero successivamente minore d' una unità, finchè la somma delle suindicate parti si trovasse contenuta nel 1° resto. In pratica poi questa somma si fa, trascurando l' inutile scrittura e dei due zeri con cui terminar debbe sempre il triplo quadrato delle decine per le unità, e dello zero in fine del triplo delle decine pel quadrato dell' unità, avvertendo invece (lo che porta allo stesso risultato) di fare a destra sporgere d' una cifra soltanto questo prodotto scritto sotto il primo, e di altra cifra pure fare sporgere a destra il cubo delle unità che vi è scritto sotto. Così rapporto all' esposto esempio la stessa somma otteniamo, e nell' uno e nell' altro dei due modi qui appresso. Se qualche cosa avanzasse dopo la sottrazione, segno sarebbe che il dato numero non fosse cubo perfetto; e siamo certi che l' *ottenuto resto non è eccedente, quando non supera il triplo della radice cubica, più il triplo del suo quadrato* (§. 206). Se altri membri vi fossero, uno alla volta accanto al residuo si abbasserebbero, e quindi tagliate due cifre a destra, si dividerebbe il numero rimanente a sinistra pel triplo quadrato di tutti i termini già ottenuti della radice. I lumi dati al (§. 229.) valgono a render ragione di questo processo.

9600	96
480	48
8	8
10088	10088.

261. Estrazione delle radici cubiche dai numeri rotti. La radice cubica d' un rotto si estrae coll' estrarla dal numeratore, e dal denominatore, e col dividere l' una per l' altra.

Così se le frazioni sono ordinarie, abbiamo

$$\sqrt[3]{{}^{32768}/_{860085351}} = {}^{32}/_{951}$$

$$\sqrt[3]{{}^{1}/_{143877824}} = {}^{1}/_{524}$$

Se le frazioni sono decimali, poiche è chiaro che il cubo di 10, ossia $10^3 = 1000$, il cubo di 100 ossia $100^3 = 1000000$, e in genere il cubo di qualsivoglia numero decadico è l' unità seguita dal tri-

(*a*) E qui non sarà inutile eliminare un errore communissimo nei principianti, qual' è quello di credere che il quadrato per es. di 4 decine, siccome formato da 4 decine per 4 decine, esser debba 16 decine ossia 160 e non 1600. A guardarci da sì falsa conseguenza valga il rammentare (§. 172) che la seguente espressione « *Il quadrato è un prodotto di due fattori identici, ossia di un fattore moltiplicato per sè stesso* » è giusta nel solo unico senso che l' *identità* dei fattori si riferisca al puro loro *quantitativo*, poichè pel resto sono nel quadrato come in tutte le moltiplicazioni si diversi i fattori a tenore della diversità del loro ufficio, quanto il possono essere due numeri uno indicante *oggetti* qual' è il moltiplicando, e l' altro indicante *ripetizione* quale è il moltiplicatore; onde è che l' indicazione di quest' ultimo non può essere nè di *decine* nè di *centinaja* ec., ma solo delle *volte* che va ripetuto il moltiplicando, e che sono precisate dalle sue unità *semplici*, e non dalle *collettizie*. Con tale avvertenza intende ognuno che per ottenere il quadrato di 4 decine vanno esse ripetute non 4 volte, quante esse sono, ma tante volte quante sono le 40 semplici unità di cui le quattro decine risultano. E questa stessa avvertenza ci offre motivo di rimarcare quanto l' esattezza e l' analitico sviluppo delle idee nei primi erudimenti di tutte, ma in particolare delle scienze esatte, influisca a guardarci dagli errori nei successivi loro progressi.

plo de' suoi zeri, ne segue che *cubi perfetti sono tutti i numeri decadici che hanno o tre zeri o un numero di zeri multiplo di 3, e che la radice di questi numeri è un numero decadico anch' esso avente il terzo dei zeri del suo cubo*, sicchè

$$\sqrt[3]{1000000} = 100$$

$$\sqrt[3]{1000000000} = 1000$$

e in grazia di ciò abbiamo $\sqrt[3]{160,103007}$ $= \sqrt[3]{^{160103007}/_{1000000}} = {}^{543}/_{100} = 5,43$. Così $\sqrt[3]{0,860085331} = \sqrt[3]{^{860085351}/_{1000000000}}$ $= {}^{951}/_{1000} = 0,951$, donde deriva la regola, *che per estrarre la radice terza dalle frazioni decimali, sieno vere o spurie, reso (se mai non lo fosse) eguale a tre o a un qualche multiplo di 3, coll' aggiunta di uno o due zeri il numero delle cifre dopo la virgola, si estrae la radice dal loro numeratore, e si tagliano in essa tante cifre a destra quanto è il terzo del numero delle cifre dopo la virgola contenute nel proposto numeratore*.

262. Estrazione delle radici cubiche dagli interi, e rotti per approssimazione. Se vogliamo approssimarci al giusto valore della radice dei numeri interi che non sono cubi perfetti, sicchè la differenza sia minore di $^{1}/_{10}$, di $^{1}/_{100}$ ec. convien ridurre l'intero a tal decimale che abbia per denominatore un numero decadico che sia cubo perfetto, il che si ottiene coll' aggiungere al numero proposto tante volte 3 zeri, quante cifre decimali vogliamo che abbia la sua radice. Così se cerchisi la radice cubica di 327 prossima sino ai centesimi solamente, noi troviamo

$$\sqrt[3]{327} = \sqrt[3]{327,000000} = 6,88 \text{ (§.261)}.$$

263. Se poi trattisi di frazioni, quando queste *sono decimali*, tanti zeri aggiungere conviene, quanti occorrono perchè le cifre dopo la virgola sieno tante volte 3, quante cifre decimali vogliamo nella radice. Così se cerchisi la radice cubica di 0,7 che differisca meno d'un centesimo dal giusto valore, avremo

$$\sqrt[3]{0,7} = \sqrt[3]{0,700000} = 0,88 \text{ (§.261)}.$$

Se la *frazione è ordinaria*, possono usarsi tre metodi diversi analoghi ai già esposti per le radici quadrate (§.257).

Estrazione delle radici di qualsiasi grado dai polinomi algebrici.

264. Poichè la formola del binomio Newtoniano serve ad esprimere la costituzione di qualunque potenza del binomio, dalla quale dipende il metodo dell' estrazione della rispettiva radice, così per comprendere sotto la massima generalità le regole a questa estrazione relative, fa d' uopo facciamo ad essa ricorso. Ordinato perciò il polinomio da cui vuolsi estrarre la radice *emmesima*, convien dare principio dalla estrazione della radice *emmesima* del 1° termine, poichè questa esprime la prima parte dell' intera radice, mentre il primo termine d' una potenza del grado m del binomio $a+c$ è a^m (§.215). Sottratta la potenza *emmesima* del primo ottenuto termine della radice *emmesima* dal dato polinomio, il primo termine del residuo esser debbo $ma^{m-1}c$ (§.215) sicchè (onde risulti la 2ª parte c della radice) convien dividere questo $ma^{m-1}c$ per ma^{m-1}, cioè per la prima parte della radice alzata alla potenza $m-1$ e moltiplicata per m, o per poi verificare se il polinomio contenga realmente tutte le altre parti costituenti la potenza *emmesima* della segnata radice che si è ottenuta coll' operare sui soli primi due termini, conviene a tenor della formola costruire tutti gli altri termini che compongono la potenza *emmesima* della segnata radice, e quindi sottrarli dal 1° resto. Se si ottiene zero di residuo, la radice è compiuta; se si ha un resto suscettibile di ulteriore processo di calcolo, segno è che la radice non è binomia, ma ha più di due termini, e allora l' operazione continuasi riguardando i due già ottenuti termini della radice come il solo primo termine a la cui potenza *emmesima* è già stata sottratta; e proseguendo a dividere per ma^{m-1}, cioè pel prodotto della potenza $m-1$ della somma dei già ottenuti termini della radice moltiplicata per m. Di questo metodo generale però quanto è semplice il concetto, altrettanto non difficile ma complicata riesce l' esecuzione, e tanto più quanto più alto è il grado m; poichè tanto maggiore è allora il numero $(m+1)$ dei termini che costituiscono la potenza.

Epilogo

Della Sezione V. Formazione delle Potenze ed estrazione delle Radici.

Una quantità entro parentisi è radice di quel grado che esprime l'esponente che vi è fuori. Una quantità sotto il segno radicale è potenza del grado indicato dall'esponente del segno. Quindi

$$\text{I.} \quad \text{se } (c)^n = a \ , \ c = \sqrt[n]{a}$$

$$\text{II.} \quad \text{se } \sqrt[n]{c} = a \ , \ c = a^n$$

e chiaro risulta dallo stesso significato dei segni che

$$\text{III.} \quad (\sqrt[n]{c})^n = c \ ; \ \text{IV.} \ \sqrt[n]{c^n} = c$$

Dopo queste nozioni ecco le quattro parti in cui questo trattato è diviso (§. 172 al 176).

I. Formazione delle potenze dei monomi.

Un numero si alza a potenza *ennesima* moltiplicandolo $n-1$ volte di seguito per sè.

Un monomio algebrico intero si alza alla potenza n, dandu alla potenza (se è di grado *pari*) il segno $+$, e (se è di grado *dispari*) il segno che ha la radice che viene elevata a potenza; alzando poscia il coefficiente alla potenza voluta, e per l'esponente di questa moltiplicando l'esponente di ciascuna lettera. Se il monomio è una frazione conviene al dato grado elevare ambi i suoi termini (§. 177 al 180).

II. Estrazione delle radici dei monomi.

Quando il monomio radice che cerchiamo è un numero di una sola cifra, essa rilevasi dalla tavola delle potenze dei numeri semplici. Quando il monomio è algebrico ed intero, nei gradi *dispari* la radice ha il *segno* della potenza: nei *pari* le radici delle quantità negative sono simboli immaginari, e le radici delle positive sono affette dal doppio segno. Dal *coefficiente* si estrae realmente la voluta radice. Pel numero indicante il di lei grado si divide l'*esponente* di ciascuna lettera. Se il monomio è frazione, si estrae la radice da ambi i suoi termini (§. 181 al 188)

Rapporto ai vari esponenti, ad alcuni dei quali ci reca la estrazione delle radici, abbiamo (§. 189 al 198) quanto segue.

I. L'esponeote intero positivo $\quad c^3 = c \times c \times c$

II. L'esponente fratto positivo $\quad c^{\frac{n}{d}} = \sqrt[d]{c^n}$

III. L'esponente zero, ... $\quad c^0 = 1$

IV. L'esponente intero negativo $\quad c^{-n} = \frac{1}{c^n}$

V. L'esponente fratto negativo $\quad c^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{c^n}}$

III. Formazione delle potenze dei polinomii.

Il *quadrato* dei binomi risulta del quadrato del 1°, del doppio del 1° nel 2°, e del quadrato del 2° termine. Perciò $2n+1$ è la differenza fra il quadrato di un dato numero e del numero che il segue. Il *cubo* dei binomi risulta del cubo del 1° termine del triplo quadrato del 1° pel 2°, del triplo del 1° pel quadrato del 2°, e del cubo del 2° termine, donde $3n^2+3n+1$ è la differenza fra il cubo di un numero, e il cubo del seguente.

Qualsiasi potenza poi d'un binomio $a+c$ si ottiene colla formola Newtoniana. Il suo primo termine è $a^m c^0$: ogni altro si forma da quel che il precede moltiplicando il suo coefficiente per l'esponente di a, dividendo il prodotto pel numero indicante il suo posto, e a destra di questo quoto ponendo a coll'esponente diminuito di 1, e e coll'esponente accresciuto di 1. I *polinomi* in genere poi si elevano a qualunque potenza con le regole stabilite pei binomi alla cui forma si riducono (§. 199 al 231).

IV. Estrazione delle radici dei polinomi

I metodi di queste estrazioni derivano dalla cognizione delle parti di cui risultano le rispettive potenze; e si sono applicati alla estrazione delle radici quadrate polinomie sì intere che frazionarie, quindi all'estrazione delle radici dai numeri interi e rotti, e sì dagli uni che dagli altri per *approssimazione* pur anche: poscia all'estrazione delle radici cubiche da tutte le ora indicate quantità; finalmente alla estrazione delle radici polinomie di qualsiasi grado (§. 232 al 264).

SEZIONE VI.

Calcolo delle quantità Radicali.

265. Poichè grande è il numero dei casi in cui non si possono estrarre le radici esattamente, e lunghe le operazioni necessarie per ottenerle per approssimazione, giova durante il processo dei calcoli algebrici indicare col segno radicale le radici da estrarsi piottosto che estrarle effettivamente, ed eseguire su queste indicazioni, per quanto si può, ciò che l'analisi algebrica esige, ad oggetto di semplicizzare il più che sia possibile i risultati, riserbando alla fine dei calcoli la

reale estrazione delle radici. Si ha così il vantaggio e di non dover tante volte ripotere questa operazione, e di praticarla sopra le espressioni più semplici, e sui più piccoli numeri che le condizioni del problema ci offrono. Ecco come presso gli Algebristi ebbe origine il calcolo delle quantità affette dal segno radicale, che perciò diconsi *quantità radicali* (a). E di queste sono interessanti le *proprietà principali*, che servono di base alle *operazioni che ne modificano il solo aspetto*, con le quali è d' uopo preparare i radicali stessi affine di eseguirvi le *operazioni che ne cambiano anche il valore*.

Proprieta' delle quantita' radicali

266. La conoscenza delle principali proprietà dei radicali restringesi alla cognizione degli effetti che in essi producono la moltiplicazione e divisione per una medesima quantità 1° dell' esponente di tutti i fattori della quantità sotto il vincolo, II° del solo esponente del segno radicale, III° dell' esponente ad un tempo e del segno radicale e dei fattori della quantità sotto il segno.

I. Effetti che produce la moltiplicazione e divisione degli esponenti delle quantità sotto il segno.

267. Trattando dell' estrazione delle radici dei monomii ci occorse osservare (§.185) che

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ora potendo esser a una quantità qualunque, e quindi anche un potenziale c^r, questo ponendo nel nicchio di a, avremo in vece

$$(\sqrt[n]{c^r})^m = \sqrt[n]{(c^r)^m} = \sqrt[n]{c^{rm}}$$

E potendo essere a anche un prodotto di più potenziali, per es. di c^r, g^m, p^u, avremo pure

$$(\sqrt[n]{c^r g^m p^u})^m = \sqrt[n]{c^{mr} g^{mm} p^{mu}}$$

cosicchè conchiudiamo, che *moltiplicare per m l' esponente della quantità, quando risulta di un fattor solo, o l' esponente di ciascuno dei fattori costituenti la quantità sotto il vincolo è un elevare alla potenza emmesima il radicale*; *e quindi il dividere per m l' esponente ec., è per conseguenza un estrarre dal radicale la emmesima radice*.

Così, se moltiplichiamo per 4 l' esponente 2 di 8 che trovasi sotto il segno di radice terza, avremo

$$\sqrt[3]{8^{2\cdot 4}} = (\sqrt[3]{8^2})^4$$

E in vero il 1° membro è $\sqrt[3]{8^{2\cdot 4}} = \sqrt[3]{8^8}$

$= \sqrt[3]{16777216} = 256.$

Il 2° membro $(\sqrt[3]{8^2})^4 = (4)^4 = 256.$

268. Ai medesimi risultamenti si giunge, se ai segni radicali si sostituiscono le potenze fratte, poichè per esempio

$$(\sqrt[m]{a^r})^n = (a^{\frac{r}{m}})^n = a^{\frac{nr}{m}} = \sqrt[m]{a^{nr}}$$

II. Effetti che produce la moltiplicazione e divisione dell' esponente del segno radicale.

269. Quando il grado della potenza cui vogliamo elevata la quantità a è un numero prodotto di due fattori m, n, noi possiamo ottenere la potenza del grado mn che chiamiamo *emmenaesima* in due modi.

(a) Avendo chiamate *Radicali* quelle quantità che sono espresse per mezzo del segno $\sqrt{\ }$, noi chiamiamo *non Radicali* quelle quantità che ne sono prive, e condanniamo il comun uso di chiamare col nome di *irrazionali* le quantità radicali, e col nome di *razionali* le quantità *non radicali*, giacchè della distinzione dei *razionali* ed *irrazionali* non sono suscettibili affatto le quantità puramente algebriche, nelle quali facendosi astrazione dal loro rapporto coll' unità, è chiaro che non può considerarsi se in esse sia rapporto o no, se sia *ratio*, o *nulla ratio* all' unità. Ed infatti può ben darsi che nella trasformazione delle formole in numeri si abbia per esempio

$\sqrt{a} = \sqrt{4} = 2$; ed $m = \sqrt{2}$

può darsi cioè che una espressione *radicale* sia data ad una quantità razionale quale è il 2; e che ad una irrazionale sia accordata una espressione *non radicale* quale è m. Non debbe insomma confondersi un *irrazionale* che è ciò che è impossibile ad esprimersi senza segno radicale, con un *radicale*, che se può essere una quantità irrazionale, può essere ancora una razionale qualunque, allorchè nella sua espressione siavi il segno radicale, che tante volte fa comodo il conservare, sebbene possa togliersi.

La possiamo ottenere direttamente apponendo ad a l'esponente mn, ed allora chiamando p per brevità la potenza che nei particolari casi operando risulta, avremo $a^{mn} = p$, donde, estraendo la radice da ambi i membri, o per meglio dire riflettendo al valore convenzionale dei segni, risulta

$$(Q) \ldots . \; a = \sqrt[mn]{p}$$

Possiamo però anche ottenere la potenza *emmennesima* di a, elevando a prima all'esponente m (per lo che risulta a^m); elevando quindi l'ottenuta potenza a^m all'esponente n, giacchè (§.178) $(a^m)^n = a^{mn}$; e perciò essendosi a^{mn} chiamata p, abbiamo $(a^m)^n = p$. Ora se si estragga la radice *ennesima* da ambi i membri di quest'ultima uguaglianza, si ha (§.176)

$$a^m = \sqrt[n]{p}$$

e da ambi i membri di questa estraendo la radice *emmesima*, risulta

$$(R) \ldots . . \; a = \sqrt[m]{\sqrt[n]{p}}$$

Ma due cose uguali ad una terza equivalgono: dunque da (Q) e da (R) risulta

$$(S) \ldots . \sqrt[mn]{p} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{p}}$$

E la (S) espressa in parole ci annunzia, che *tanto è estrarre da una data potenza* p *immediatamente la radice* emmennesima, *la radice cioè di un grado espresso da un numero prodotto di due fattori* m *ed* n, *quanto è dalla potenza* p *estrarre prima la radice* ennesima, *e poi da questa radice* ennesima *considerata come potenza* estrarre *la radice* emmesima.

Così per esempio vogliasi la radice sesta di 64. Il grado di questa radice è 3.2, e quindi

$$\sqrt[6]{64} \text{ ossia } \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Ed infatti (§. 177) abbiamo $\sqrt[6]{64} = 2$.

270. Dalla formola (S) scende poi questa proprietà interessante, che cioè » I. *Moltiplicare per* m *l'esponente del segno d'una quantità radicale è un estrarvi la radice emmesima. All'opposto* II. *Dividere per* m *l'esponente del segno, è un elevare la quantità radicale alla potenza emmesima*. Infatti I. la (S) ci mostra che moltiplicare per m l'esponente n del segno radicale della radice *ennesima* di p (ed ecco ciò che indica il primo membro) equivale ad estrarre la radice *emmesima* dalla radice *ennesima* di p, lo che è espresso dal secondo membro. E II. se moltiplicando l'esponente del segno per m si estrae la radice *emmesima*, è legittima conseguenza, che dividendo l'ottenuto prodotto per m si torna a quella potenza *emmesima* che per mezzo della moltiplicazione avevamo convertito in radice. E ciò pure chiaramente ci manifesta la (S), poichè la stessa *radice ennesima di p* che qui poi riguardiamo per potenza *emmesima* (da ottenersi coll'innalzaro ad m la sua *emmesima* radice) noi otteniamo tanto col semplicemente dividere per m l'esponente mn del segno radicale del 1° membro, che col togliere nel secondo il segno della radice *emmesima*, lo che è un elevare alla potenza *emmesima*.

$$\text{Così essendo} \ldots . \sqrt[2]{729} = 27,$$

$$\text{debbe aversi} \ldots \sqrt[2\cdot 3]{729} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Ed infatti (§. 177) la radice sesta di 729 è 3.

$$\text{Così essendo} \ldots . \sqrt[3\cdot 4]{331441} = 3,$$

$$\text{debbe aversi} \ldots . \sqrt[4]{331441} = 3^3 = 27.$$

Ed infatti (§. 177) la radice quarta di 331441 è 27.

271. Sostituendo ai radicali le potenze fratte, otteniamo i medesimi risultati, poichè

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[m]{p^{\frac{1}{n}}} = p^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{p}$$

III Effetti che produce la moltiplicazione e la divisione degli esponenti si della quantità sotto il segno, che del segno radicale

272. *Il valore di un radicale non si altera, se per una stessa quantità si moltiplichi o si divida tanto l'esponente del segno, che di ciascuno dei fattori costituenti la quantità sotto il vincolo radicale;* giacchè moltiplicando per m l'esponente di ciascuno dei fattori della quantità sotto il segno, otteniamo la potenza *emmesima* del dato radicale, e ritorniamo per estrazione di radice a quel radicale che alla potenza *emmesima* abbiamo elevato, allorchè moltiplichiamo per la stessa m l'esponente del segno. Allo stesso radicale si torna per ope-

razioni inverse, se invece di moltiplicare, dividiamo. Si ha dunque

$$(A)\ldots\ldots \sqrt[m]{a^c} = \sqrt[mn]{a^{cn}}$$

$$\text{Così} \ldots\ldots \sqrt[3]{4^3} = 8; \text{ e } \sqrt[3\cdot4]{4^{3\cdot4}} = 8$$

Ed infatti la radice ottava di 4^{12} ossia la radice ottava di 16777216 è 8 (§.177)

Così $\sqrt[6]{8^{10}} = \sqrt[6]{1073741824} = 32$ e si ha pure $\sqrt[3]{8^5} = \sqrt[3]{32768} = 32$, o anche $\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 32$.

273. L'esposta verità in egual modo apparisce se alle espressioni radicali si sostituiscano le potenze fratte; poichè d'altro allora non trattasi che di moltiplicare o dividere per una stessa quantità ambi i termini del fratto esponente, lo che non ne altera il valore. Infatti con questa sostituzione l'eguaglianza (A) (§.272) diventa

$$a^{\frac{c}{m}} = a^{\frac{cn}{mn}}$$

Operazioni che alterano l'aspetto e non il valore dei radicali

274. Queste operazioni contraddistinte tutte col nome di riduzioni, e tutte appoggiate alle proprietà ora dimostrate, sono I° la riduzione dei *non radicali* a radicali, e II viceversa: III. La riduzione dei radicali all'omogeneità: e IV alla menoma espressione.

275. I. La riduzione a forma radicale delle quantità non radicali *si ottiene col collocarle sotto il voluto segno, dopo di averle elevate alla potenza del grado stesso del segno*; giacchè (§176. IV).

$$a = \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}}$$

$$\text{Così } 4p^2x^3 = \sqrt[3]{(4p^2x^3)^3} = \sqrt[3]{(64p^6x^9)}$$

Corollario di questa riduzione *è il modo di trasportare sotto il segno radicale la quantità che è fuori di esso* (la quantità cioè che gli sta a sinistra, e che dicesi *coefficiente del radicale*; giacchè è evidente che ciò debbe ottenersi trasportando come fattore sotto il segno radicale questo coefficiente della radice già elevato all'esponente stesso del segno radicale. Ed in vero

$$a\sqrt[m]{a^r} = \sqrt[m]{a^m}\sqrt[m]{a^r} = \sqrt[m]{a^{m+r}}$$

Così per le medesime ragioni sono vere le seguenti uguaglianze

$$4\sqrt{ac} = \sqrt{16ac}\,;\; 3p^2\sqrt{p} = \sqrt{9p^5}$$

$$(3m^2+cr)\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{(27a^2m^6+27a^2cm^4r}$$
$$+9a^2c^2m^2r^2+a^2c^3r^3)$$

Sostituendo ai radicali gli esponenti fratti, otteniamo i medesimi risultati. Così

$$a\sqrt[m]{a^r} = a^{\frac{m}{m}}\, a^{\frac{r}{m}} = a^{\frac{m+r}{m}} = \sqrt[m]{a^{m+r}}$$

276. II. La riduzione dei radicali a quantità non radicali si eseguisce, quando è possibile, con la estrazione dell'indicata radice; e corollario di questa riduzione è il *trasporto delle quantità che sono sotto il segno radicale a coefficiente fuori del segno*, operazione che ha luogo soltanto quando la quantità sotto il vincolo radicale sia decomponibile in due fattori, uno dei quali sia potenza del grado indicato dal segno radicale. In tal caso, decomposto il radicale nei detti due fattori, e tratta da quello, che è potenza del grado del radicale, la rispettiva radice, questa si scrive per coefficiente innanzi al segno, dopo il quale si scrive soltanto l'altro fattore.

ESERCIZIO

$$\sqrt{169a^2cp^2r^5x} = \sqrt{13^2a^2p^2r^4 \times crx} = 13apr^2\sqrt{crx}$$

$$\sqrt[5]{32a^5c^7m^{11}p^6} = \sqrt[5]{(2^5a^5c^5m^{10}p^5 \times c^2mp)} = 2acm^2p\sqrt[5]{c^2mp}$$

$$\sqrt[3]{(64c^3m^2+64ac^3)} = \sqrt[3]{\left(4^3c^3(m^2+a)\right)} = 4c\sqrt[3]{(m^2+a)}$$

$$\sqrt[3]{1080c^4} = \sqrt[3]{2^3.3^3.5c^4} = \sqrt[3]{(6^3c^3.5c)} = 6c\sqrt[3]{5c}$$

$$2\sqrt[3]{2500} = 2\sqrt[3]{(5^3 \times 5.2^2)} = 10\sqrt[3]{20}$$

$$\sqrt{(9a^7m+6a^4m^3+am^5)} = \sqrt{(9a^6+6a^3m^2+m^4)am} = (3a^3+m^2)\sqrt{am}$$

$$\sqrt{\frac{18a^3m^2+12a^2cm+2ac^2}{147p^5}} = \left(\frac{(\sqrt{3am}+c)^2 \times 2a}{\sqrt{(7^2p^4 \times 3p)}}\right) = \frac{3am+c}{7p^2}\sqrt{\frac{2a}{3p}}$$

277. E da questi esempi stessi risulta, che per agevolmente trovare il fattore potenza del grado del radicale, la cui radice debbe recarsi fuori del segno, se le quantità sono polinomie, non giova che il lungo esercizio del calcolo: so le quantità poi sono monomie, serve all' uopo il risolvere i coefficienti numerici, se vi sono, nei loro fattori primi, dividere l' esponente di ciascun fattore per l' esponente del segno radicale, porre i quoti per esponenti ai fattori rispettivi *fuori*, ed i residui per esponenti ai fattori rispettivi *sotto* il segno radicale.

278. Se poi ai radicali sono sostituite le potenze fratte, gli ultimi risultati sono i medesimi. Ed invero come

$$\sqrt[3]{a^5m^6p^7} = am^2p^2\sqrt[3]{a^2p},$$

così pure

$$a^{\frac{5}{3}}\,m^{\frac{6}{3}}\,p^{\frac{7}{3}} = am^2p^2a^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}} = am^2p^2\sqrt[3]{a^2p}$$

279. III. La riduzione dei radicali all' omogeneità ossia al medesimo grado o nome *si ottiene moltiplicando l' esponente della quantità sotto il segno e l' esponente del segno di ciascun radicale o* 1° *per l' esponente del segno radicale dell' altro, se sieno due soli; o* 2° *pel prodotto di tutti gli esponenti degli altri segni radicali, se sieno più, o* 3° *(quando gli esponenti dei segni abbiano fattori comuni) pel quoto che si ottiene dividendo il prodotto dei soli loro fattori diversi presi al massimo grado per l' esponente del segno su cui si opera* È la dimostrazione di queste regole è simile a quella data per la riduzione delle frazioni al comun denominatore. Ecco vari esempi in cui sotto ai radicali di diverso grado sono collocati gli equivalenti ridotti al grado medesimo.

Col 1° metodo abbiamo

$$\sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[4]{c^5}\ \Big|\ \sqrt[r]{a^m},\ \sqrt[n]{c^t}\ \Big|\ \sqrt[1]{a^1},\ \sqrt[3]{c}$$

$$\sqrt[12]{a^8},\ \sqrt[12]{c^{15}}\ \Big|\ \sqrt[rn]{a^{mn}},\ \sqrt[rn]{c^{rt}}\ \Big|\ \sqrt[3]{a^3},\ \sqrt[3]{c}$$

Col 2° metodo abbiamo

$$\sqrt[3]{c^2m^4},\ \sqrt{c^3},\ \sqrt[5]{cm^3}$$

$$\sqrt[30]{c^{20}m^{40}},\ \sqrt[30]{c^{45}},\ \sqrt[30]{c^6m^{18}}$$

Col 3° metodo abbiamo

$$\sqrt[4]{a^3},\ \sqrt[6]{c}\ \Big|\ \sqrt{c},\ \sqrt[4]{c^3},\ \sqrt[8]{c^5}$$

$$\sqrt[12]{a^9},\ \sqrt[12]{c^2}\ \Big|\ \sqrt[8]{c^4},\ \sqrt[8]{c^6},\ \sqrt[8]{c^5}$$

280. Sostituendo ai radicali le quantità affette da esponenti fratti, giungiamo ai medesimi risultati col ridurre i loro esponenti allo stesso denominatore.

Così p. es. $a^{\frac{2}{3}}$, $c^{\frac{5}{4}}$ divengono $a^{\frac{8}{12}}$, $c^{\frac{15}{12}}$, che sono radicali del grado stesso, allorchè si torni a dar loro la forma radicale.

281. IV. La riduzione dei radicali alla piu' semplice espressione *si ottiene col dividere l' esponente del loro segno radicale, e gli esponenti di ciascuno dei fattori delle quantità sotto il segno pel massimo loro comune divisore. Eccone esempi.*

I. $\sqrt[mn]{a^{mr}c^{my}} = \sqrt[mn]{(a^rc^y)^m} = \sqrt[n]{a^rc^y}$;

II° $\sqrt[8]{64a^6c^3} = \sqrt[8]{4^3a^6c^3} = \sqrt{4a^2c}$

III° $\sqrt[4]{(4m^4+4m^3p+m^2p^2)} =$

$\sqrt[4]{(4m^2+4mp+p^2)m^2} =$

$\sqrt[4]{(2m+p)^2m^2} = \sqrt{(2m+p)m}$

282. Se esprimiamo le quantità radicali per mezzo degli esponenti fratti, giungiamo ai medesimi risultati. Infatti così agendo sul I.° esempio, abbiamo

$$\sqrt[mn]{a^{mr}c^{my}} = a^{\frac{mr}{mn}}c^{\frac{my}{mn}} = a^{\frac{r}{n}}c^{\frac{y}{n}} = \sqrt[n]{a^rc^y}$$

In egual modo il II.° e il III.° esempio.

Addizione e sottrazione.

283. I. CASO. RADICALI SIMILI che hanno cioè il medesimo segno radicale, e sotto il segno una quantità non già simile soltanto ma identica. *Questi è ben chiara, che giusta le regole della riduzione si riducono ad un termine solo*, Così

$$3\sqrt{2c^3}+5\sqrt{2c^3}=8\sqrt{2c^3}.$$
$$7\sqrt{am}-6\sqrt{am}=\sqrt{am}.$$
$$m\sqrt{3a^5}+n\sqrt{3a^5}=(m+n)\sqrt{3a^5}.$$

A questo caso pure appartengono que' radicali, che divengono simili col ridurli alla più semplice espressione, *o* col trarre fuori del segno que' fattori che ne sono suscettibili. Così abbiamo

$$3a\sqrt{g^3m}+\sqrt[4]{16a^4g^6m^2}=3ag\sqrt{gm}$$
$$+2ag\sqrt{gm}=5ag\sqrt{gm}.$$

$$4a\sqrt[3]{2p}+\sqrt[3]{16a^3p}-{}^{3c}/_{am}\sqrt[3]{2a^6p}=$$
$$4a\sqrt[3]{2p}\ +2a\sqrt[3]{2p}-{}^{3ac}/_{m}\sqrt[3]{2p}=$$
$${}^{a}/_{m}(6m-3c)\sqrt[3]{2p}.$$

$$\sqrt{32mx^3}+2x\sqrt{2mx}-6\sqrt{2mx^3}=$$
$$4x\sqrt{2mx}+2x\sqrt{2mx}-6x\sqrt{2mx}=0.$$

284. II. CASO. RADICALI DISSIMILI. Non potendo per questi aver luogo riduzione, *convien limitarsi alla semplice indicazione delle loro addizioni e sottrazioni, come p.es. nel caso di* $\sqrt{a}+\sqrt{c}$; *e di* $7\sqrt{a}-3\sqrt{5a}$.

Moltiplicazione.

285. I. CASO. RADICALI PER NON RADICALI. *Questi si avvicinano gli uni agli altri, ponendo per primo il fattore non radicale.* Così $c\times\sqrt{m}=c\sqrt{m}$; *e* $\sqrt{(c^2+p^2)}\times(a-g)$ $=(a-g)\sqrt{(c^2+p^2)}$.

286. II. CASO. RADICALI PER RADICALI DEL GRADO STESSO. Avendosi $\sqrt{a}\times\sqrt{c}=\sqrt{ac}$ (§.184) ben si deduce che *la loro moltiplicazione si eseguisce moltiplicando tra loro le quantità sotto il vincolo, e anteponendo al loro prodotto il segno radicale comune*. Ed eccone esempi.

$$\sqrt{(m^3-m^2n)}\times\sqrt{(mn^2-n^3)}=$$
$$m\sqrt{(m-n)}\times n\sqrt{(m-n)}=mn\sqrt{(m-n)^2}$$

$=m^2n-mn^2$. Similmente operando si ha $4\sqrt{(a^2-c^2)}\times\sqrt{(a^2+c^2)}=4\sqrt{(a^4-c^4)}$,

$$\text{Così}\quad\sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3c^6}{a^4-c^4}}\times\sqrt[5]{\frac{a^2c^3m^2+c^5m^2}{n^2}}$$

$$=\sqrt[5]{\frac{a^3c^3m^2(2a^6-c^6)}{n^2(a^2-c^2)}}$$

Così pure $\sqrt{121}\times\sqrt{81}=\sqrt{121.81}=\sqrt{9801}=99$ quale appunto si ottiene moltiplicando 11 radice di 121 per 9 radice di 81. Così $\sqrt{18}\times\sqrt{2}=\sqrt{36}=6$. Ed infatti $\sqrt{18}\times\sqrt{2}=\sqrt{2.9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}\sqrt{2}=3\sqrt{2^2}=3.2=6$.

287. III. CASO. RADICALI PER RADICALI DI GRADO DIVERSO. *Questo si converte nell' antecedente*. Così

$$3\sqrt[3]{c^2}\times4\sqrt{3a}=3\sqrt[6]{c^4}\times4\sqrt[6]{27a^3}=$$
$$12\sqrt[6]{27a^3c^4}.$$

288. IV. CASO. COMPLESSI DI NON RADICALI E RADICALI TRA LORO. *Questo caso altro non esige che moltiplicare ciascun termine del moltiplicando per ciascuno del moltiplicatore a tenore delle regole ora stabilite*.

Esempio per la moltiplicazione di radicali dello stesso grado.

$$\begin{array}{llllll}
\textit{Moltiplicanda} & 2\sqrt{a} & +m & -3\sqrt{ac} & & \\
\textit{Moltiplicatore} & 3m\sqrt{a} & -2m\sqrt{ac} & & & \\
\hline
 & 6m\sqrt{a^2} & +3m^2\sqrt{a} & -9m\sqrt{a^2c} & & \\
 & & & -4m\sqrt{a^2c} & -2m^2\sqrt{ac} & +6m\sqrt{a^2c^2} \\
\hline
\textit{Prodotto} & 6am & +3m^2\sqrt{a} & -13am\sqrt{c} & -2m^2\sqrt{ac} & +6mac
\end{array}$$

Esempio per la moltiplicazione con riduzione al grado stesso, di radicali di grado diverso

$$\begin{array}{lllll}
\textit{Moltiplicando} & x & +2\sqrt{x} & +\sqrt[3]{y} & \\
\textit{Moltiplicatore} & 4x & -8\sqrt{x} & +\sqrt[3]{y} & \\
\hline
& 4x^2 & +8x\sqrt{x} & +4x\sqrt[3]{y} & \\
& & -8x\sqrt{x} & & -16\sqrt{x^2} \quad -8\sqrt[6]{x^3y^2} \\
& & & +x\sqrt[3]{y} & \qquad\qquad +2\sqrt[6]{x^3y^2} \quad +\sqrt[3]{y^2} \\
\hline
\textit{Prodotto} & 4x^2 & & +5x\sqrt[3]{y} \quad -16x & -6\sqrt[6]{x^3y^2} \quad +\sqrt[3]{y^2}
\end{array}$$

E dopo le acquistate notizie, niuna difficoltà offre la moltiplicazione di quei radicali, che taluni chiamano *universali*, in cui le quantità sotto il vincolo sono complessi di quantità *non radicali e radicali*. Ed infatti

$$\sqrt[3]{(a+\sqrt{a})}\times\sqrt[3]{(4a-3\sqrt{a})} = \sqrt[3]{\Big((a+\sqrt{a})(4a-3\sqrt{a})\Big)} = \sqrt[3]{(4a^2+a\sqrt{a}-3a)}$$

Così $\sqrt[3]{(a+\sqrt{x})}\times\sqrt{x} = \sqrt[6]{(a^2+2a\sqrt{x}+x)}\sqrt[6]{x^3} = \sqrt[6]{(a^2x^3+2ax^3\sqrt{x}+x^4)}$.

289. Sostituendo le quantità affette da esponente fratto ai radicali in qualunque dei diversi casi delle eseguite moltiplicazioni, si hanno i medesimi risultamenti. Ed eccone un esempio

$$\sqrt[5]{x^2}\times\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt{x^3} = \sqrt[30]{x^{77}} \text{ (§. 279).}$$

Egualmente ricorrendo agli esponenti fratti, otteniamo

$$x^{\frac{2}{5}}\times x^{\frac{2}{3}}\times x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = x^{\frac{77}{30}}$$

$$= \sqrt[20]{x^{77}}$$

Divisione

290. I. Caso. Non radicali per radicali e viceversa. Questo divisioni vengono indicate con i segni consueti, scrivendo

$$a:\sqrt{c}\text{, ovvero } \frac{a}{\sqrt{c}}\text{ ; } \sqrt{m}:a\text{ , o } \frac{\sqrt{m}}{a}$$

E solo è ad avvertirsi che il quoto frazionario può essere suscettibile di riduzione ai menomi termini quando la quantità non radicale che esiste in un termine della frazione sia decomponibile in fattori radicali eguali ad alcuno di quelli che esistono nell'altro termine. Così abbiamo $a^3:a\sqrt{a} = \frac{aa\sqrt{a}\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = a\sqrt{a}$

Così $\frac{m\sqrt{c}}{c^2} = \frac{m\sqrt{c}}{c\sqrt{c}\sqrt{c}} = \frac{m}{c\sqrt{c}}$.

Così $\frac{m^3}{\sqrt[3]{m^4}} = \frac{\sqrt[3]{m^9}}{\sqrt[3]{m^4}} = \sqrt[3]{m^5}$

291. II. Caso. Radicali per radicali del grado stesso. Dalla seguente formola (A) dimostrata al §. 188 deducesi la (B)

$$\text{(A)}\ \sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{c^2}} \quad \text{(B)}\ \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}}$$

la quale ci mostra che si ottiene il quoto di un radicale diviso per altro dello stesso grado, coll' anteporre il segno radicale al quoto delle loro quantità sotto il vincolo : ed eccone esempi

$$\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{ac}{a}} = \sqrt{c}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5832}}{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{\frac{5832}{27}} = \sqrt[3]{216} = 6.$$

Ed appunto 6 si ottiene, dividendo 18 radice terza di 5832 per 3 radice terza di 27.

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\frac{75}{27}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$

Ed infatti $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{27}}=\frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{5}{3}$

292. III. Caso. Radicali per radicali di grado diverso. *Questo si converte nell' antecedente, riducendo i radicali al medesimo nome*, ed eccone diversi esempi

$$am\sqrt{am}:a\sqrt[3]{am}=am\sqrt[6]{a^3m^3}:a\sqrt[6]{a^2m^2}$$

$$=\frac{am}{a}\sqrt[6]{\frac{a^3m^3}{a^2m^2}}=m\sqrt[6]{am}.$$ Così pure

$225\sqrt{ch^2p^3}:25\sqrt[5]{c^2h^4p^7}=9\sqrt[10]{ch^2p}$. Così puro

$$\frac{\sqrt{46656}}{\sqrt[3]{46656}}=\frac{\sqrt[6]{(46656)^3}}{\sqrt[6]{(46656)^2}}=$$

$$\sqrt[6]{\frac{(46656)^3}{(46656)^2}}=\sqrt[6]{46656}=6;$$

ed infatti

$$\frac{\sqrt{46656}}{\sqrt[3]{46656}}=\frac{\sqrt{(2^6.3^6)}}{\sqrt[3]{(2^6.3^6)}}=\frac{2^3.3^3}{2^2.3^2}=2.3=6.$$

293. IV. Caso. Complessi di radicali e non radicali tra loro. *Non si esige che l' applicazione delle regole stabilite per la divisione dei polinomi, non che di quelle stabilite tanto pel caso in cui i monomii radicali su cui cade la divisione abbiano il medesimo grado, che pel caso in cui l' abbiano diverso.*

Esempio in cui i radicali hanno il grado stesso

$$\begin{array}{l|ll}
\textit{Dividendo}\quad a^3+2ac\sqrt{ac}+c^3 & a\sqrt{a}+c\sqrt{c} & \textit{Divisore} \\
\quad -a^3-ac\sqrt{ac} & a\sqrt{a}+c\sqrt{c} & \textit{Quoto} \\
\quad\quad +ac\sqrt{ac}+c^3 & & \\
\quad\quad -ac\sqrt{ac}-c^3 & & \\
\quad\quad\quad 0 \quad\quad 0 & &
\end{array}$$

Esempio in cui i radicali hanno grado diverso

$$\begin{array}{l|ll}
\textit{Dividendo}\quad 6x-\sqrt[6]{x^2z^2}-12\sqrt[3]{z^2} & 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{z} & \textit{Divisore} \\
\quad -6x+9\sqrt[6]{x^3z^2} & 3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{z} & \textit{Quoto} \\
\quad\quad +8\sqrt[6]{x^3z^2}-12\sqrt[3]{z^2} & & \\
\quad\quad -8\sqrt[6]{x^3z^2}+12\sqrt[3]{z^2} & & \\
\quad\quad\quad 0 \quad\quad 0 & &
\end{array}$$

Esempio di divisione di non radicali per radicali

$$\begin{array}{l|ll}
\textit{Dividendo}\quad c^3 \quad\quad\quad\quad -m & c-\sqrt[3]{m} & \textit{Divisore} \\
\quad -c^3+c^2\sqrt[3]{m} & c^2+c\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m^2} & \textit{Quoto} \\
\quad\quad +c^2\sqrt[3]{m} \quad\quad -m & & \\
\quad\quad -c^2\sqrt[3]{m}+c\sqrt[3]{m^2} & & \\
\quad\quad\quad +c\sqrt[3]{m^2}-m & & \\
\quad\quad\quad -c\sqrt[3]{m^2}+m & & \\
\quad\quad\quad\quad 0 \quad\quad 0 & &
\end{array}$$

Esempio di divisione dei radicali così detti universali

$$\frac{\sqrt{(6z\sqrt{az}-4z^2\sqrt[6]{c^2z^3}-9m\sqrt[6]{a^3c^2}+6mz\sqrt[3]{c^2})}}{\sqrt{(3\sqrt{a}-2z\sqrt[3]{c})}}=$$

$$\sqrt{\frac{6z\sqrt{az}-4z^2\sqrt[6]{c^2z^3}-9m\sqrt[6]{a^3c^2}+6mz\sqrt[3]{c^2}}{3\sqrt{a}-2z\sqrt[3]{c}}}=\sqrt{(2z\sqrt{z}-3m\sqrt[3]{c})}$$

294. Uso facendo, in vece dei radicali, delle equivalenti quantità affette da esponenti fratti in tutti gli esposti casi di divisione, otteniamo i medesimi risultamenti. Eccone due esempi:

$$c^3:\sqrt{c^5}=\sqrt{c^6}:\sqrt{c^5}=\sqrt{c}$$

Ed egualmente

$$c^3:c^{\frac{5}{2}}=c^{3-\frac{5}{2}}=c^{\frac{1}{2}}=\sqrt{c}$$

Così pure

$$\sqrt[9]{m^7}:\sqrt[3]{m^2}=\sqrt[9]{m}$$

Ed egualmente

$$m^{\frac{7}{9}}:m^{\frac{2}{3}}=m^{\frac{1}{9}}=\sqrt[9]{m}$$

Elevazione a potenza dei radicali

295. Poichè abbiamo dimostrato (§. 267 e 272) che

$$(\sqrt[n]{a^m})^r=\sqrt[n]{a^{mr}};\ \text{e}\ (\sqrt[nr]{a^m})^n=\sqrt[r]{a^m}$$

è ben chiaro che *si eleva a qualunque potenza una quantità radicale, o col moltiplicare l' esponente di ciascun dei fattori della quantità sotto il segno, ovvero col dividere l' esponente della radice (se ne è un multiplo) pel grado della voluta potenza*: ed eccone esempi.

$$(\sqrt[5]{12a^2m^5})^2=\sqrt[5]{144a^4m^{10}}$$

$$\left(\sqrt[5]{(3f+m)}\right)^2=\sqrt[5]{(9f^2+6fm+m^2)}$$

$(\sqrt[3]{8})^2=\sqrt[3]{64}=4$: infatti $(\sqrt[3]{8})^2=$

$(\sqrt[3]{2^3})^2=2^2=4$

$(\sqrt{36})^3=\sqrt{(36)^3}=\sqrt{46656}=216$: infatti $(\sqrt{36})^3=6^3=216$

$$(\sqrt[6]{117649a^6})^3=\sqrt{117649a^6}=343a^3$$

$$\left(\sqrt[4]{(6561)}\right)^2=\sqrt[4]{6561}=9.$$

296. Si hanno i medesimi risultamenti, se sostituiscansi alle quantità radicali quelle affette da fratto esponente. Così come

$$(\sqrt[3]{a^5})^2=\sqrt[3]{a^{10}},\ \text{così}\ (a^{\frac{5}{3}})^2=a^{\frac{10}{3}}=\sqrt[3]{a^{10}}$$

Estrazione di radici dai radicali.

297. Dalle proprietà delle quantità radicali che furono dimostrate al (§.267) e al (§.269), chiaramente risulta che

$$\text{I.}\ldots\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^2}}=\sqrt[15]{a^2};\ \text{e}\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^r}}=\sqrt[mn]{a^r}$$

$$\text{II.}\ldots\sqrt[3]{\sqrt{a^9c^{15}}}=\sqrt{a^3c^5},\ \text{e}\ \sqrt[n]{\sqrt[r]{c^{nu}}}=\sqrt[r]{c^u}$$

$$\text{III.}\ \sqrt[4\cdot2]{\sqrt{a^9}}=\sqrt[8]{a^3};\ \text{e}\ \sqrt[mn]{\sqrt[r]{c^{nu}}}=\sqrt[mr]{c^u}$$

risulta cioè, che *si estrae una radice da una quantità radicale* o per meglio dire *si indica senza l' uso del doppio segno un' estrazione di radice da un radicale* I. *col moltiplicare l' esponente del suo segno radicale per quello della voluta radice; o meglio quando si può* II. *col solo dividere l' esponente d' ogni fattore sotto il segno per l' esponente della voluta radice*; *o* III. *col dividere l' esponente della quantità sotto il segno pel massimo fattor comune che abbia con esso l' esponente della voluta radice, e moltiplicare per l' altro fattore della voluta radice l' esponente del segno radicale.*

È poi a notarsi che se il radicale da cui vuolsi estrarre una data radice sia fornito di coefficiente, conviene trasportarlo

sotto il segno prima di passare all' estrazione della radice. Così

$$\sqrt{(3c^3\sqrt{2m})} = \sqrt[4]{18c^4m} = c\sqrt[4]{18m}.$$

298. Se in vece di estrarre la radice dalle quantità radicali, eleviamo ad un esponente fratto le quantità equivalenti affette da un fratto esponento, otteniamo il medesimo risultato. Così come, per ciò che si è ora mostrato

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{m^5}} = \sqrt[12]{m^5},$$

egualmente

$$\sqrt[3]{m^{\frac{5}{4}}} = (m^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}} = m^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{m^5}.$$

299. L' estrazione di radice può essere poi successivamente ripetuta, possono cioè darsi quantità soggette a più vincoli radicali: può per es. cercarsi la radice c della radice m della radice n di a^r, lo che si esprime così

$$\text{«}\ \sqrt[c]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^r}}};\ \text{»}$$

e poichè (§.297)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^r}} = \sqrt[mn]{a^r}$$

ne segue che

$$\sqrt[c]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^r}}} = \sqrt[c]{\sqrt[mn]{a^r}} = \sqrt[cmn]{a^r},$$

Essendo poi $cmn = mcn = ncm$, ec. (§.31) segue ancora che

$$\sqrt[cmn]{a^r} = \sqrt[mcn]{a^r} = \sqrt[ncm]{a^r},$$

e perciò ancora

$$\sqrt[c]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^r}}} = \sqrt[m]{\sqrt[c]{\sqrt[n]{a^r}}} = \sqrt[n]{\sqrt[c]{\sqrt[m]{a^r}}}$$

cosicchè conchiuder possiamo che *una quantità qualunque soggetta a più segni radicali si può esprimere con un solo segno che abbia per indice il prodotto degli indici de' radicali dati; ovvero da un radicale che ha un indice composto di più fattori si può tornare ad un radicale avente ciascuno di quei fattori per indice di un distinto segno, sicchè si trovi sotto tanti vincoli quanti sono i fattori comunque disposti dell' indice del radicale primitivo*, operazione di somma utilità, perchè ne' casi delle incomode estrazioni di alte radici i cui esponenti non sieno numeri primi, ci pone sotto gli occhi un compenso, additandoci le *successive* radici, che estrarre dobbiamo dalla data quantità per ottenere lo stesso risultato; e tale artificio si è perciò detto *metodo delle estrazioni successive*.

Così $\sqrt[4]{a^4} = \sqrt{\sqrt{a^4}} = \sqrt{a^2} = a$

e $\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[3]{\sqrt{a^5}}$. Così pure abbiamo

$\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$. Così $\sqrt[6]{2985984} = \sqrt{\sqrt[3]{2985984}} = 12$; e

$\sqrt[12]{4096} = \sqrt[3\cdot2\cdot2]{4096} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4096}}} = 2$.

Così $\sqrt[12]{531441} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{531441}}} = 3$;

ed anche $\sqrt[8]{6561} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}} = 3$. Così pure $\sqrt[9]{512} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = \sqrt[3]{8} = 2$;

così in fine $\sqrt[18]{101559956668416} =$

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{(101559956668416)}}} = 6.$

Epilogo

Della Sezione VI. — Calcolo dei Radicali.

Dei radicali vanno studiate le *proprietà*, le *operazioni che ne alterano il solo aspetto*; e le *operazioni che ne alterano l' aspetto e il valore* (§ 265).

Le proprietà dei radicali sono tre. I. Essi vengono elevati alla potenza n, o viene da essi estratta la radice *ennesima*, se per n venga moltiplicato o diviso l' esponente d' ogni fattore della quantità sotto il segno. II. Accade l' opposto se viene per n moltiplicato o diviso l' esponente del segno. III. I radicali non s' alterano se per n venga moltiplicato o diviso tanto l' esponente di ogni fattore sotto il segno, che l' esponente del segno (§. 266 al 273).

Le OPERAZIONI CHE NE MODIFICANO IL SOLO ASPETTO sono quattro. I. LA RIDUZIONE DELLE QUANTITA' NON RADICALI A RADICALI, che si fa col porre sotto il segno radicale voluto la quantità elevata all' esponente del segno, donde poi il

il trasporto delle quantità dal FUORI al SOTTO il segno, che si eseguе collocando come fattore sotto il segno il coefficiente elevato all' esponente del segno radicale. II. La RIDUZIONE (che si fà per estrazione di radice) dei RADICALI A QUANTITA' NON RADICALI, donde *il trasporto fuori del segno* della radice ennesima di quello dei due fattori del'a quantità sotto il segno che è potenza *ennesima*. III. La RIDUZIONE DEI RADICALI ALL' OMOGENEITA' che si eseguе con metodo analogo al'a riduzione delle frazioni allo stesso nome. IV. La RIDUZIONE ALLA MENOMA ESPRESSIONE, che si ottiene dividendo l' esponente del segno, e d' ogni fattore sotto il segno pel massimo loro comun divisore (§. 274 al 282).

Le OPERAZIONI CHE NE ALTERANO L' ASPETTO E IL VALORE sono sei. La *prima* è l' ADDIZIONE e la *seconda* è la SOTTRAZIONE dei radicali tanto dissimili the simili; e in questi conviene eseguire la riduzione se ha luogo. La *terza* è la MOLTIPLICAZIONE, e I. dei *Non radicali per Radicali*, ed altro non si fa che avvicinarli: II. di *Radicali per Radicali del grado stesso*, e si appone il comune segno al prodotto delle quantità sotto il vincolo; III. di *Radicali per Radicali di grado diverso*, e si opera come nel secondo caso dopo aver'i ridotti al grado stesso, e IV. di *complessi di Radicali e non Radicali* per *complessi di Radicali* e non *Radicali*, e si eseguе come nei polinomi, applicando alla moltiplicazione d' ogni monomio per monomio le regole ora esposte. La *quarta* è la DIVISIONE che ammette i quattro così stessi della moltiplicazione; e due sono i rimarchi a farvisi cioè che nel I. caso il quoto che è una frazione si riduce alla menoma espressione quando il termine non radicale sia decomponibile in radicali eguali ad alcuno di quelli che sono nell' altro termine: e che il II. caso di *dividendo e divisore radicali* si eseguisce anteponendo il segno radicale al quoto delle loro quantità sotto il vincolo. La *quinta* è LA ELEVAZIONE A POTENZA n che si esegue o per n moltiplicando l' esponente di ogni fattore sotto il segno, o per n dividendo se ne è suscettibile l' esponente del segno. La *sesta* è l' ESTRAZIONE DI RADICE che si esegue facendo l' opposto, e dalle teoriche relative risulta l' util metodo delle ESTRAZIONI SUCCESSIVE (§. 283 al 299).

SEZIONE VII.

Teoria delle equazioni di secondo grado ad un' incognita.

300. Ora che abbiamo acquistata la nozione delle quantità radicali, notiamo che per decidere del grado delle equazioni conviene non solo fare sparire l' incognita dal denominatore, come avemmo occasione di notare, parlando delle formole generali delle equazioni di 1° grado, ma anche dal segno radicale se ne fosse affetta, perchè in grazia ancora di quel segno, il grado di una equazione spesso apparisce più basso di quello che è realmente.

E per conseguire la eliminazione dei segni radicali di 2° grado soltanto, dai quali trovisi affetta la x (questo essendo il solo caso che ora c' interessa) giova ridurre ad un solo termine, o al minor numero possibile i termini che contengono la x sotto il vincolo radicale. Poscia se il termine che ha x sotto il vincolo è un solo, si fa rimanere isolato nel 1° membro; e profittando dell' assioma che quantità eguali debbono avere uguali si le radici che le potenze del grado medesimo, si alzano a quadrato ambi i membri e l' intento è ottenuto. Se i termini aventi la x sotto il vincolo sono più, giova isolarli nel 1° membro uno alla volta, e ogni volta ripetere per ciascuno la elevazione a quadrato. Spesso però in questo caso risultano equazioni di gradi del 2° più alti.

Così avendosi l' equazione $x+\sqrt{(c+x)} = m$, otterremo $\sqrt{(c+x)} = m-x$; e quindi $c+x = m^2-2mx+x^2$.

Così avendosi $x+\sqrt{mx}+\sqrt{cx} = p$, sarà pure $(\sqrt{m}+\sqrt{c})\sqrt{x} = p-x$ ed $(m+2\sqrt{mc}+c)x = p^2-2px+x^2$

Così avendosi $\sqrt{(a-x)}-x = \sqrt{(m-x)}$ sarà pure $\sqrt{(a-x)} = \sqrt{(m-x)}+x$ quindi $a = m+2x\sqrt{(m-x)}+x^2$ donde $2x\sqrt{(m-x)} = a-m-x^2$ e finalmente $4mx^2-4x^3 = a^2-2am+m^2-2ax^2+2mx^2+x^4$. E ciò premesso conchiudiamo che

Equazioni di 2° grado ad una incognita sola sono *tutte quelle, nelle quali è il 2 il più alto esponente cui trovasi elevata l' incognita dopo che sia stata eliminata dai denominatori, e tratta fuori del vincolo radicale, se vi era.*

301. Al modo stesso che tutte le equazioni di 1° grado ad una incognita anche le più complicate sono espresse per una formola generale che (§.122) si vide essere $cx+a = 0$, così pure tutte le equazioni di 2° grado ad un' incognita son pur esse espresso da una formola generale che è $qx^2+rx+s = 0$; poichè anche le più complicate altri termini contenere non possono che I. quantità note, la cui somma, sia positiva, sia negativa, è nelle ora esposta equazione espressa da $+s$; II. quantità che moltiplicano l' incognita x, la cui somma positiva o negativa è espressa da $+r$; e III. quantità che moltiplicano x^2, il cui insieme è espresso da $+q$. E per semplicizzar sempre più l' espressione, la x^2 può liberarsi dal coefficiente q, dividendo per lo stesso q ambi i membri, cosicchè si ha $x^2+{}^r/_q\times x+{}^s/_q = 0$; e fatti ${}^r/_q = c$; ${}^s/_q = a$, si ha in fine

$$x^2+cx+a = 0 .$$

E questa è la formola generale di tutte le equazioni di 2° grado, nella quale $+c$ e $+a$ esser possono quantità intere o fratte, razionali o irrazionali, monomie o polinomie, positive o negative.

302. Così per esempio la equazione

$${}^m/_x-{}^n/_m = {}^m/_{(n-x)}$$

col trasporto nel 1° membro delle quantità che sono nel 2°, e coll' eliminare dai denominatori la x, diventa

$$mn-2mx-n^2x/_m+nx^2/_m = 0$$

ed ambo i membri dividendo per ${}^n/_m$ coefficiente della x^2, si ottiene finalmente

$$x^2-(2m^2+n^2)/_n\times x+m^2 = 0$$

equazione che è la stessa formola generale

$$(A)\ldots\ldots\ x^2+cx+a = 0$$

quando in questa si faccia

$$+c = -(2m^2+n^2)/_n ;\ \text{e}\ +a = m^2$$

303. La formola (A) poi ci offre nel primo suo membro un trinomio, il di cui 1° termine è $+x^2$, ossia il quadrato dell' incognita, il 2° è sempre $+cx$, ossia l' incognita x moltiplicata per un fattore noto, il 3° è una quantità nota; e marcare interessa che l' algebrica loro somma è una nullità, giacchè debbe il primo membro essere uguale al secondo che è zero. Questa condizione è la feconda sorgente delle molte interessanti proprietà che le equazioni di 2° grado ci offrono: essa esige che vi sieno degli intrinseci rapporti fra i nominati tre termini del 1° membro; ed infatti isolando ciascuno di essi si hanno i seguenti risultati.

304. Il 1° termine è uguale all' algebrica somma degli altri due presa col segno opposto, si ha cioè $x^2 = -(cx+a)$.

305. Il 2° è uguale all' algebrica somma del 1° e 3° presa col segno opposto, è cioè $cx = -(x^2+a)$.

306. Il 3° è uguale alla somma algebrica del 1° e 2° presa col segno opposto è cioè $a = -(x^2+cx)$.

307. Ora se cominciamo a costruire la formola (A) del §. 302 esprimendo i suoi termini giusta le condizioni cui deggiono soddisfare, chiamato m il valore di x, il *primo termine* sarà m^2. Per rapporto al 2° *termine* cx notiamo primieramente che se il fattore c è una quantità diversa da x, sarà x (ossia m) più o meno qualche altra quantità n; e perciò dando al $+$ un significato algebrico, il quantitativo di c sarà $m+n$. Notiamo inoltre che cx dovendo dare zero con la somma algebrica del 1° e del 3° termine, essendo (§. 305) $cx = -(x^2+a)$, debbe essere algebricamente sottratto dalla somma algebrica degli altri due, ossia debbe essere affetto dal segno $-$ algebrico. E poichè quando un prodotto è affetto dal segno $-$ (come per ciò che si è ora mostrato è cx) e lo è dal segno $+$ uno dei suoi fattori, siccome nel caso nostro è l' x che per intrinseca sua natura è sempre positivo (§.123) ne segue che l' altro fattore che è c, lo debbe essere dal $-$, è chiaro che $c = -(m+n)$; e quindi il secondo termine $cx = -(m+n)m$. Questo 2° termine cx è dunque la somma algebrica di due quantità m,n presa col segno contrario, e moltiplicata per l' una di esse. Ma la somma di due quantità qualunque moltiplicata per l' una di esse dà per prodotto un binomio composto del quadrato dell' una, più il prodotto dell' una per l' altra, giacchè

$$(m+n)m = m^2+mn;$$
$$(m+n)n = n^2+mn;$$

dunque allorquando per comporre la formola generale delle equazioni di 2° grado

al primo termine x^2, ossia ad m^2 aggiungiamo il secondo ex, cioè $-(m+n)m$ ossia $-(m^2+mn)$, otteniamo per somma dei primi due termini $m^2-m^2-mn = -mn$.

Rimane ora che per compire il primo membro si scriva il *terzo termine*, e poichè questo colla già ottenuta somma degli altri due, che è $-mn$, debbe dare zero, è indispensabile che sia $+mn$.

Componendo dunque uno dopo l' altro i termini a tenore delle condizioni cui deggiono soddisfare, la formola generale $x^2+ex+a = 0$, fatto $x = m$, viene espressa per

$$(B) \ldots \; m^2-(m+n)m+mn = 0,$$

ove apparisce dovere necessariamente essere

$$e = -(m+n), \text{ ed } a = mn,$$

affinchè il 1° membro sia zero realmente.

Ma essendo evidente che anche

$$n^2-(m+n)n+mn = 0,$$

ne segue, che rimanendo intatti i valori delle quantità note dell' equazione, cioè e ed a, la formola $x^2+ex+a = 0$ non solo si verifica quando ad x si sostituisca il suo valore m, ma si verifica ancora quando in vece della x si ponga n, si ponga cioè quella quantità che nel comporre l' equazione abbiamo dovuto aggiungere algebricamente ad m, affinchè la somma che ne risulta presa col segno opposto sia $+e$, affinchè cioè si abbia $-(m+n) = +e$, donde $n = -(m+e)$. Dunque anche n è un valore di x, ossia è una *radice* dell' equazione. *Radici* infatti chiamano i Matematici i diversi valori che ha una medesima incognita appunto, perchè per mezzo di *estrazioni di radici*, si ottengono.

308. Noi abbiamo prese le mosse dalla supposizione che la x della formola (A) avesse un solo valore, e la esposta analisi ce ne ha svelato anche un altro. Potrebbe mai una equazione di 2° grado avere anche più? La ricerca è ben naturale: ed ecco come dimostrasi, che non ne ha che le due sole m ed n, che abbiamo scoperte.

Una radice diversa da m potrà esprimersi per m più o meno d, ossia per $m+d$. Ciò posto, sostituito $m+d$ alla x nella

$$x^2+ex+a = 0,$$

avremo $\quad (m+d)^2+e(m+d)+a = 0;$

e sostituendo a e e ad a i loro equivalenti espressi per mezzo delle due radici m ed n con cui hanno invariabili rapporti (§.307), avremo

$$(D).. \; (m+d)^2-(m+n)(m+d)+mn = 0,$$

da cui risulta $dm+d^2-dn = 0$, ossia

$$m+d-n = 0, \text{ donde } m+d = n.$$

E ciò chiaramente addimostra che una radice diversa dalla m, collocata nel posto di x nella equazione ove sono quelle stesse quantità note e ed a, cui corrispondono le radici m ed n, debbe per soddisfare all' equazione necessariamente essere n. Or se una radice diversa da m debbe per soddisfare all' equazione non altro essere che n, ne segue che le sole m ed n vi soddisfano, quelle sole quantità cioè, la cui somma presa col segno contrario (§.307), e perciò espressa da $-(m+n)$ è il coefficiente e del 2° termine, e il cui prodotto mn è a, cioè il terzo termine noto (a).

309. Nella esposta dimostrazione i rapporti fra le radici e le quantità note e ed a dell' equazione, hanno sbucciato fuori naturalmente, per così esprimerci, da loro medesimi di mano in mano che siamo venuti componendo i suoi termini, giammai perdendo di vista la essenziale condizione, che zero esser doveva la loro somma. Possono però essi dedursi ancora dal rapporto che ha il terzo termine noto a con gli altri due, rapporto che giova ben ponderare, perchè altre proprietà interessanti delle equazioni di 2° grado ci svela, le quali fanno strada alla teorica generale delle equazioni.

310. Abbiamo (§.306) $a = -(x^2+ex)$,

(a) Se non una sola, ma due sono le radici che hanno le equazioni di 2° grado a un' incognita, potrebbe mai darsi che due pure ne avessero le equazioni ad un' incognita del primo grado? La loro formola generale $ex = -a$ ce ne fa tosto rilevare l' impossibilità. Essa infatti, chiamato m il valore della x, diviene $em = -a$; ed è evidente che qualunque altra quantità diversa da m (e perciò o maggiore o minore) dar debbe, allorchè è moltiplicata per e, un prodotto maggiore o minore e non già uguale alla em e quindi alla $-a$, come dovrebbe per soddisfare alla equazione. Questa dimostrazione semplicissima parmi così chiara e facile a saltare agli occhi di chicchesia, che non saprei a dir vero comprendere perchè Francoeur, e parecchi con esso abbiano fatto ricorso ad altre più complicate.

e perciò, espresso per m il valore di x, abbiamo $a = -m^2 - cm$. Quindi se ad a questo suo valore si sostituisca nella $x^2+cx+a = 0$, avremo

$$(E)....x^2+cx-m^2-cm = 0$$

ovvero

$$x^2-m^2+(x-m)c = 0$$

ovvero (§.60)

$$(x-m)(x+m)+(x-m)c = 0$$

ovvero

$$(F)....(x-m)(x+m+c) = 0.$$

E ben esaminando la costituzione della (F), e riflettendo che un prodotto è sempre zero quando è zero un qualunque dei suoi fattori, rileviamo che il 1° membro è eguale a zero non solo quando $x-m=0$, ma anche quando $x+m+c=0$. Noi siamo partiti dal dato incontrastabile che la incognita x avesse un valore che abbiamo chiamato m, ma non avevamo verun altro dato che in vece di un valore ne potesse aver due. Ora ci avvediamo che la equazione di 2° grado si verifica non solo quando $x-m = 0$, ossia quando $x = -m$, ma si verifica ancora quando $x+m+c=0$, ossia quando $x = -(m+c)$. Dunque non solo m, ma ancora $-(m+c)$ è radice della equazione perchè manda a zero il prodotto $(x+m)(x+m+c)$, in che si è trasformato il primo membro della generale equazione di 2° grado. E di questa verità ci dà una riprova il vedere che non solo la m, ma anche la radice $-(m+c)$ sostituita alla x verifica l' equazione (E). Dunque tanto $+m$ che $-(m+c)$ sono radici dell' equazione di 2° grado a un' incognita: dunque I° *tutte le equazioni di 2° grado ordinate e ridotte a zero hanno due radici, ciascuna delle quali non è che la somma dell' altra e del coefficiente del 2° termine presi entrambi col segno contrario*.

311. Il valore poi $-(m+c)$ che oltre al valore m la x può ricevere è la stessa radice n ottenuta (§. 307) giacchè come allora vedemmo che n diventa $-(m+c)$ introducendo c nella espressione di n, così ora vediamo che la radice $-(m+c)$ diventa n, sostituendo a c il suo valore $-(m+n)$. Quindi il 2° fattore del 1° membro della (F), cioè $x+m+c$ è $x-n$, e possiamo perciò conchiudere che l' equazione generale di 2° grado trasformata in $(x-m)(x+m+c) = 0$, può anche esprimersi per $(x-m)(x-n) = 0$. Può dirsi cioè II° che *qualsiasi equazione di 2° grado ordinata e ridotta a zero si compone del prodotto di due fattori binomi, detti lineari ossia di primo grado, aventi ciascuno per primo termine la* x *e per 2° termine l' uno l' una, e l' altro l' altra radice prese col segno contrario*. E dall' essere ogni equazione di 2° grado anche espressa per $(x-m)(x-n) = 0$, risulta non potere essa avere altre radici oltre m ed n; poichè se i valori m ed n verificano l' ora esposta eguaglianza, ogni altro valore che si dasse ad x non la potrebbe verificare, perchè niuno allora dei due fattori componenti il 1° membro potrebbe divenire zero, e zero perciò non potrebbe diventare il 1° membro come l' equazione richiede.

312. E se il primo membro dell' equazione generale a zero ridotta è un prodotto di due fattori, è chiaro III° che *dividendo l' equazione generale per uno dei suoi fattori, debbe con zero di resto risultar l' altro*, e prova di fatto che ciò avvenga, ne dà la divisione della formola generale per $x-m$. Risulta infatti dal qui sottoposto specchio

$x^2 + cx$	$+a$	$x-m$
$-x^2 + mx$		$x+(m+c)$
$+(m+c)x$	$+a$	
$-(m+c)x+m^2+cm$		
(A) ..... $+m^2+cm$	$+a$	

che il quoto è $x+(m+c)$ ed (A) è il residuo. Ma questo residuo è zero, perchè è precisamento il primo membro dell' equazione generale ridotta a zero, quando ad x siasi sostituito m: dunque la divisione ha dato un quoto esatto; e il quoto ottenuto col dividere l' equazione pel fattore $x-m$ è $x+m+c$, ossia è la x, più l' altra radice $(-m+c)$ presa col segno contrario.

313. E da questa proprietà segue IV° che *nota una radice, può l' altra ottenersi per mezzo della ora indicata divisione*.

314. E se m e $-(m+c)$ sono le due radici, chiaro risulta che la loro somma $m-m-c$ è $-c$; e che il loro prodotto è $-m^2-cm = a$; cosicchè V° *la somma delle radici è il coefficiente del 2° termine della formola generale preso col segno contrario, e il loro prodotto è il 3° termine noto* a, *verità cui per altra via giungemmo* (§.307).

315. E da ciò dedurre possiamo VI° che *il risolvere una equazione di 2° grado è un*

trovare due numeri, dei quali è data somma e prodotto.

316. Dalla cognizione poi che a è il prodotto delle due radici, e c ne è la somma presa col segno opposto risulta VII° *il criterio per decidere se le radici sono o non sono irrazionali;* giacchè lo sono, se trovati tutti i possibili fattori numerici che a due a due producono il numero a, niun paio di essi si trovi, la cui somma sia $-c$.

317. Dalla cognizione delle esposte proprietà la soluzione pure deriva di tre dei quattro quesiti che possono darsi in una equazione di 2° grado, quando due soli essendo noti dei suoi quattro elementi che sono m ed n, cioè le due radici, c, ossia il coefficiente del 2° termine, ed a, ossia il terzo termine, si cerchino gli altri due.

E 1° « *Data la radice* m *e il coefficiente* c, *si trovi* n *ed* a ». Abbiamo $n = -(m+c)$ (§.307); e quindi, essendo $a = mn$ (§.307) abbiamo $a = m \times -(m+c)$. La equazione poi potrebbe anche direttamente ottenersi (§.311) moltiplicando $(x-m)$ per $(x+m+c)$. Così volendosi per es. un' equazione che abbia 3 per una sua radice e -12 per coefficiente del 2° termine, moltiplicando $(x-3)$ per $(x+3-12)$ otteniamo $x^2-12x+27 = 0$.

II.° « *Data la radice* m, *e il terzo termine* a, *si trovi* n *e* c. » Essendo (§.307) $a = mn$ si ottiene tosto $n = {}^a/_m$. Essendo (§.305) $cx = -(x^2+a)$ ossia $cm = -(m^2+a)$ ne segue essere $c = -m - {}^a/_m$.

III.° « *Date le due radici* m *ed* n, *si trovino* c *ed* a ». La soluzione si ha dalle due equazioni $c = m+n$ ed $a = mn$. Presi perciò o due numeri, o due quantità algebriche sia monomie, sia polinomie a nostro capriccio, e stabilite per radici, potremo tosto conoscere e qual coefficiente debba darsi alla x nel 2° termine cx, giacchè debbe essere la somma delle stabilite radici col segno contrario, e qual debba essere il terzo termine nolo a, giacchè esser debbe delle due radici il prodotto. Così volendo formare un' equazione che abbia per radici 5 e 7, avremo $c = -(5+7) = -12$; ed $a = 35$, e l' equazione sarà $x^2-12x+35 = 0$. E si potrà l' equazione ottenere pure facendo il prodotto $(x-5)(x-7)$.

IV°. Finalmente fra i quattro possibili quesiti superiormente accennati è per ultimo rimasta la ricerca delle due radici m ed n, dati essendo c ed a. E questo quesito, che non può come gli altri tre essere risoluto con la cognizione delle sole proprietà della formola generale, è quello appunto che ammettendo per ignote le radici m ed n, ossia quel termine x che è elevato al 2° grado, fa sì che di 2° grado sia l' equazione che ci si propone a risolvere, e di questa risoluzione, passiamo ora ad occuparci.

Risoluzione generale delle equazioni di 2° grado ad un' incognita, e loro analisi.

318. Per risolvere la formola generale

$$(P) \;\ldots\ldots\; x^2 + cx + a = 0$$

ossia per ottenere la x sola nel 1° membro, e quantità tutte note nell' altro, cominciamo dal trasportare la quantità nota a nel 2° membro; ed avremo $x^2 + cx = -a$. Ora se estrarre potessimo la radice da ambi i membri, si avrebbe un' equazione di 1° grado: e questa già sapendo risolvere, l' intento potrebbe dirsi ottenuto. Non potendo però questa estrazione farsi nel 1° membro, che è un binomio, perchè un binomio non è un quadrato completo (§.233) conviene ricorrere a qualche artificio. Or bene considerando il 1° membro $x^2 + cx$, noi ci accorgiamo che se non è un quadrato completo, risulta però di parti tali, che possono riguardarsi come materiali atti coll' aggiunta di un altro termine a costituire il quadrato di un binomio. Infatti x^2 può riguardarsi pel quadrato del primo termine x di questo binomio; e $+cx$ pel doppio prodotto del 1° termine x nel 2°, il qual 2° termine trovasi essere $+{}^c/_2$ ritraendolo dallo stesso cx col dividere questo doppio prodotto del 1° nel 2° termine per $2x$ doppio del primo (§.234). Non manca dunque (§201) a questo primo membro $x^2 + cx$ che il solo quadrato del 2° termine $+{}^c/_2$, ossia ${}^{c^2}/_4$ per divenire completo quadrato del binomio $x + {}^c/_2$. Si aggiunga perciò ${}^{c^2}/_4$ a questo 1° membro affine di compiere il quadrato: si aggiunga poi anche al 2° membro affine sia conservata la loro eguaglianza, o così avremo

$$(Q) \;\ldots\; x^2 + cx + {}^{c^2}/_4 = {}^{c^2}/_4 - a$$

E poichè le radici di quantità eguali sono eguali, estraendo realmente la radice dal 1° membro perchè è un quadrato, ed indicando la estrazione nel 2° perchè la radice non può da esso algebricamente ottenersi (§.233) e rammentando inoltre che lo radici pari sono sempre affette dal doppio segno (§.235) avremo

$$(R) \ldots \pm(x+{}^{c}/_{2}) = \pm\sqrt{({c^2}/_{4} - a)}$$

la quale ognuno vede chiaro che si risolve nelle due seguenti

$$(S) \ldots +x + {}^{c}/_{2} = +\sqrt{({c^2}/_{4} - a)}$$
$$(T) \ldots -x - {}^{c}/_{2} = -\sqrt{({c^2}/_{4} - a)}$$

Ma di queste due equazioni la (T) non è adottabile perchè contiene il $-x$, e la x non può giammai essere affetta dal segno $-$, giacchè v' è l' uso di cercar sempre le cose é mai la sottrazione delle cose (§.123); e d' altronde se la (T) vuolsi rendere servibile convertendo il $-x$ in $+x$ col cambiamento del segno in tutti i suoi termini, essa si trasforma nella (S). Ne segue perciò che la (S) è la sola formola che vale all' uopo; e dalla (S) risulta

$$(U) \ldots x = -c/_{2} + \sqrt{({c^2}/_{4} - a)}$$

Ma la x oltre il trovato valore, che possiamo per brevità chiamare m, ne ha un altro ancora che è $-(m+c)$: dunque accordando ad x quest' altro valore, avremo

$$x = -m-c = +{}^{c}/_{2} - \sqrt{({c^2}/_{4} - a)} - c$$

ovvero

$$(V) \ldots x = -{}^{c}/_{2} - \sqrt{({c^2}/_{4} - a)}$$

E poichè (U) e (V) non differiscono che soltanto nel segno, da cui è affetto nel 2° membro il $\sqrt{({c^2}/_{4} - a)}$, così possiamo le due formole in una sola riunire, scrivendo

$$(A) \ldots \ldots x = -{}^{c}/_{2} \pm \sqrt{({c^2}/_{4} - a)}$$

Ed infatti dei due formanti il doppio segno prendendo il superiore, abbiamo la (U) che esprime la radice m, prendendo l' inferiore, abbiamo la (V) che esprime la radice $-(m+c)$. E quest' ultima equazione (A) tradotta in parole ci esprime che « *in ogni equazione di 2° grado ordinata e ridotta a zero il valore della incognita è formato dal semi-coefficiente del 2° termine preso col segno contrario, più o meno la radice seconda del quadrato di questo semi-coefficiente unito alla quantità nota presa anch' essa col segno contrario* (a).

319. Sostituendo poi nella FORMOLA GENERALE $x^2+cx+a = 0$ ad x^2 il quadrato del binomio $-c/_{2} \pm \sqrt{({c^2}/_{4} - a)}$ che nolla EQUAZIONE FINALE (A) abbiamo ora ottenuta, e ad x lo stesso binomio che il duplice valore della x ci esprime, otteniamo l' EQUIVALENZA, donde l' IDENTITÀ. Ed ecco sotto un colpo d' occhio queste quattro eguaglianze nel seguente quadro riunite

FORMOLA GENERALE $x^2+cx+a = 0$

EQUAZIONE FINALE $x = -{}^{c}/_{2} \pm \sqrt{({c^2}/_{4} - a)}$

EQUIVALENZA ${c^2}/_{4} \mp c\sqrt{({c^2}/_{4} - a)} + {c^2}/_{4} - a - {c^2}/_{2} \pm c\sqrt{({c^2}/_{4} - a)} + a = 0$

IDENTITÀ $0 = 0$

E come abbiamo verificata la formola generale sostituendo ad x il duplice suo valore, sarà bene che gli allievi verifichino ancora, che la somma dello due radici ossia dei due valori di x distinti in (U) ed in (V) (§.318) è uguale al $-c$; e che il loro prodotto è uguale ad a.

320. Con l' applicazione dell' equazione finale (A) del (§.318) senza essere obbligati a rifare i calcoli precedenti, si ha immediatamente il valor della x in ogni caso particolare. Per esempio per $x^2-10x+24 = 0$ si trova tosto $x = 6$ e $= 4$. Per $x^2+2x = 35$ si ottiene tosto $x = 5$ e

(a) E qui notiamo che il doppio segno posto nell' equazione finale non è risultato come erroneamente si suppone e si crede di dimostrare, dal processo di risoluzione, giacchè un solo è il valore di x che in grazia di questo processo, come abbiamo esposto, si ottiene; ma unicamente deriva dalla riunione fatta in una formola stessa dei due valori di x che si sono scoperti allorchè si sono analizzate le proprietà della formola generale ridotta a zero, quali proprietà perciò è necessario che sieno bene conosciute prima di accingerci alla sua risoluzione.

$= -7$. Così pure nella soluzione dei problemi, il cui enunciato si traduce in una equazione di 2° grado, l'applicazione della formola finale, o del teorema che essa esprime ci reca tosto alla soluzione richiesta appena che sia stato il problema tradotto in equazione. Eccono quattro esempi.

321. *Ho piantato tante file di alberi quanti alberi contiene una fila. Non potendo estendere la piantata in largo, ho quindi piantato per lo lungo altri* 1500 *alberi convertendo il quadrato in un rettangolo composto di* 80 *file, ciascuna delle quali contiene lo stesso numero d' alberi, che in ogni fila del quadrato si contenevano. Di quanti alberi è composta ogni fila?* La è o di 50 o di 30. Ed infatti chiamato x questo numero, si ha $x^2+1500 = 80x$; e quindi $x^2-80x+1500=0$; ed $x = 40 \pm \sqrt{(40^2-1510)} = 50$ e $= 30$.

322. *A Tullio che studia le equazioni di 2° grado disse il Maestro. Non v' erano in questa borsa e non vi sono che zecchini. Ve ne erano tre, più il nonuplo del quadrato del numero dei zecchini rimasti ora, quando cominciai a distribuire in premio a ciascuno delli tuoi condiscepoli una somma uguale a quella che ora vi esiste. Io ti dono la borsa e il contenuto, se indovini quanti zecchini vi sono. — Uno zecchino rispose Tullio, giacchè* $^1/_3$ *di zecchino che sarebbe l' altro valore dell' incognita è escluso dalle condizioni; ed ebbe la borsa.*

Infatti $9x^2+3 = 12x$, donde $x = ^2/_3 \pm ^1/_3$, ossia $x = 1$ e $= ^1/_3$.

323. *Ti dono il decuplo della mia vincita, se tu la indovini, dice Turno a Metello, e per dartelo non debbo altro aggiungere che una lira meno un centesimo al quadrato delle lire che ho vinte.* — Della tua generosità non mi fido, risponde Metello, perchè se io ti dico che la tua vincita è stata di lire nove e nove decimi, tu puoi farmi credere che hai vinto in vece un decimo di lira e viceversa.

Ed in vero $x^2+0,99 = 10x$, donde $x = 5 \pm \sqrt{\frac{2401}{400}}$ ossia $x = 9,9$ ed $= 0,1$.

324. « *Una comitiva in cui erano tre donne ha speso in un convito lire* 72. *Due socii non aderendo alla determinazione degli altri di escludere le donne dal riparto, pagano unicamente per la loro porzione. Restando a carico di tutti gli altri la spesa delle donne, ciascuno di questi paga lire* 9 *di più. Di quanti individui è composta la comitiva?* — Di otto.

È chiaro infatti che l'insieme delle quote sborsate da tutti quelli che pagano ancor per le donne (i quali sono in numero di $x-5$ perchè sono il total numero x diminuito delle *tre* donne e dei *due* soci che pagano soltanto per loro) più l'insieme delle quote degli altri due è uguale a lire 72; e perciò avviene che si abbia $(x-5)(^{72}/_x+9)+2\times{}^{72}/_x = 72$ donde

$$x = ^5/_2 \pm \sqrt{(^{25}/_4+24)}$$

ossia $x = 8$, e $= -3$, dei quali valori di x, solo il 1° è conciliabile collo precise condizioni del problema, non potendosi il 2° adottare, se non con varie modificazioni nell' enunciato, che sarebbero richieste dalla mutazione di x in $-x$ (§.127).

325. Ma questa formola di risoluzione così utile, poichè non appena che i problemi sono in equazione tradotti, essa ci precisa il valore della cosa che ricerchiamo, merita di essere accuratamente esaminata: o tre sono i principali rilievi. I° sull'essero o non essere uguali a zero o l'una o l'altra, o entrambe le quantità note a,c: II° sulla costituzione del binomio che è sotto il vincolo radicale, e sul rapporto di differenza fra i suoi termini: III° sul rapporto di differenza fra la quantità che precede, e la quantità radicale che segue il doppio segno.

I. Osservazioni intorno alla deficienza dei termini.

326. Può darsi, e specialmente quando le condizioni del problema sono molte, che i termini costituenti il polinomio c, non che quelli costituenti il polinomio a si elidano: può cioè darsi che sia $c = 0, a = 0$. In questo caso la formola generale diventa $x^2 = 0$, e la formola di risoluzione ci dà zero per ambi i valori di x

327. Può darsi che la sola c abbia valore; e in tal caso essendo $a = 0$, la formola generale diviene $x^2+cx = 0$, e la finale modificasi in

$$x = -^c/_2 \pm \sqrt{(c^2/_4-0)} = -^c/_2 \pm ^c/_2,$$

donde $x = 0$, e $= -c$; ed entrambi

questi valori sostituiti alla x verificano la equazione (a).

328. Può darsi che a abbia un valore, e sia $c = 0$, ed allora, mentre l' equazione generale perdendo cx diventa $x^2 + a = 0$, la formola di sua risoluzione diventa $x = -0 + \sqrt{(0-a)}$ ossia $x = \pm\sqrt{-a}$. E questa equazione $x^2 + a = 0$, essendo una vera equazione di 2° grado, che non può come l' antecedente ridursi a equazione di 1° grado prima di essere risoluta, suole a preferenza dell' antecedente (che ha pure due termini soli ancor essa) chiamarsi esclusivamente equazione di 2° grado a due termini (b).

329. Può darsi finalmente che sì a che c abbiano valore: ed in questo caso, che è il più ovvio, l'equazione dicesi *completa o a tre termini*, ed in questo appunto hanno luogo il II° ed il III° rilievo accennati al (§.325).

II Osservazioni intorno alla costituzione del binomio che è sotto il vincolo radicale nella equazione finale.

330. Nell' applicazione della formola finale $x = -c/_2 \pm \sqrt{(c^2/_4 - a)}$ a tutti i diversi casi particolari che si sono risoluti, nei quali le radici erano razionali, abbiamo con qualche meraviglia rimarcato che il binomio $(c^2/_4 - a)$ ridotto in numeri è sempre un quadrato. Cesseremo perciò di meravigliarcene quando, bene analizzando la sua costituzione, ci avvedremo che quel binomio è sempre il quadrato della semidifferenza algebrica delle due radici. Ed in vero sebbene, finchè è un binomio è impossibile che tale apparisca, quadrato addiviene allorchè vengono espressi i suoi termini per mezzo delle radici m ed n dell' equazione.

Infatti rammentando che $c = -(m+n)$ ed $a = mn$, la equazione finale (G) quì sottoposta.

$$(G) \ldots\ldots x = -c/_2 \pm \sqrt{(c^2/_4 - a)}$$

diviene

$$(L) \ldots\ldots x = \frac{m+n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - mn},$$

ovvero

$$(M) \ldots\ldots x = \frac{m+n}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2+2mn+n^2-4mn}{4}},$$

ovvero

$$(N) \ldots\ldots x = \frac{m+n}{2} \pm \sqrt{\frac{(m-n)^2}{4}},$$

donde

$$(O) \ldots\ldots x = \frac{m+n}{2} \pm \frac{m-n}{2} = m \text{ ed } = n.$$

(a) Il medesimo risultato 0 ovvero $-c$ si sarebbe ottenuto ancora senza ricorrere alla formola generale di risoluzione, riflettendo che la formola $x^2 + cx = 0$ può anche esprimersi per la seguente $x(x+c) = 0$. Infatti potendo essere zero un prodotto tanto per essere zero il primo, quanto per essere zero il secondo dei suoi fattori, ne segue che l' equazione è soddisfatta tanto se si faccia $x=0$ quanto se si faccia $(x+c) = 0$, donde $x = -c$. Questa stessa equazione $x^2 + cx = 0$ che potrebbe dirsi *equazione di 2° grado incompleta per mancanza del terzo termine ossia della quantità nota*, suole invece riguardarsi per un' equazione di primo grado, a motivo che dividendo ambi i suoi membri per x, risulta l' equazione di primo grado $x+c = 0$, donde $x = -c$, come abbiamo ottenuto di sopra, e a nulla monta che più non comparisca in questa equazione di 1° grado l'altro valore di x sopra ottenuto, subitochè questo valore è 0. Sarebbe in vero senza applicazione veruna, e perciò inconcludente il rilievo, che anche lo zero soddisfa, perchè $0^2 + c \times 0 = 0$, perchè cioè *lo zero posto zero volte più e volte è zero*.

(b) Rapporto alla equazione a due termini è a notarsi che la sua formola di risoluzione $x = \pm\sqrt{-a}$ non esprime già che la x sia *immaginaria*, come creder potria chi non rammentasse che nella formola generale di risoluzione i segni hanno valore algebrico. Avvertiamo perciò bene che il $-a$ non ci appalesa in conto alcuno se la quantità sia positiva o negativa: questo simbolo ci appalesa soltanto che la quantità a è affetta da un segno contrario a quello dal quale è affetto il $+a$. Perciò in tutti que' casi particolari nei quali il $+a$ della formola generale ridotta a zero esprime una quantità positiva, il $-a$ è quantità negativa, e quindi $\sqrt{-a}$ è *immaginaria*. In tutti que' casi poi nei quali il $+a$ della formola generale è quantità ne-

E I° osservando (G) rileviamo che *la quantità sotto il segno radicale è sempre il quadrato del semi-coefficiente del 2° termine diminuito algebricamente della quantità nota* a; ovvero osservando (L), *è il quadrato della semi-somma algebrica delle radici algebricamente diminuito del loro prodotto.* II° Osservando (N) ci avvediamo che attesa la accaduta riduzione, *la quantità sotto il segno radicale è sempre il quadrato della semi-differenza algebrica delle due radici*, cosicchè se le radici dell' equazione sono razionali, è sempre da questo quadrato estraibile in numeri la esatta radice, poichè dessa è sempre la semi-differenza algebrica, cioè o la semi-differenza reale o la semi-somma dei due valori della x. III°. Confrontando poi la quantità radicale espressa in (L) con altra espressa in (N), ci avvediamo (svolgendo il senso algebrico dei segni col dare ad essi il significato reale) che risultano le due seguenti equazioni.

$$(A) \ldots\ldots \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - mn = \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

$$(B) \ldots\ldots \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + mn = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$$

---

gativa, il $-a$ è positiva, e $\sqrt{-a}$ è perciò una *reale* quantità.

Ella è pure util cosa il notare che l'equazione a due termini avrebbe potuto sciogliersi senza applicarvi la formola generale di risoluzione, ma direttamente deducendola dalla formola generale, che per mancanza del termine cx si riduce alla,

$$x^2 + a = 0.$$

Da questa infatti si passa alla

$$x^2 = -a$$

Donde si trae

$$\pm x = \pm \sqrt{-a}$$

e finalmente, tralasciando il segno inferiore poichè non cercasi mai il $-x$ (§ 123), risulta

$$(A) \ldots\ldots \mp x = + \sqrt{-a}$$

E da ciò chiaro apparisce che al modo stesso che non potè dedursi il duplice valore della x dalla soluzione della equazione di 2° grado completa, così nemmeno lo si può dedurre dalla equazione di 2° grado a due termini, giacchè (A) non presenta che un solo valore.

Ed infatti quanto è vero per esempio che

$$(B) \ldots\ldots \sqrt{81} = \pm 9,$$

altrettanto è falso che dalla

$$x^2 = 81$$

si tragga, come comunemente si usa e scrivere, e dire

$$x = \pm 9;$$

giacchè è chiaro che vi discende invece

$$(D) \ldots\ldots \pm x = \pm 9,$$

qualora si rifletta che a quella modificazione cui assoggettiamo l'uno, convien pure che assoggettiamo anche l'altro membro di una equazione. E poichè la (D) equivale a queste due equazioni

$$+x = +9$$
$$-x = -9$$

e la seconda convertesi nella prima (§. 118) ben si vede che la risoluzione non concede alla x che un solo valore.

Il simbolo dunque

$$x = \pm 9$$

non è il risultato della risoluzione dell' equazione

$$x^2 = 9^2$$

esso è il corollario del teorema I° (§ 60) che *la somma moltiplicata per la differenza di due quantità dà per risultato la differenza dei loro quadrati.* Ed in vero essendo

$$x^2 = 81 = 9^2;$$

e quindi essendo

$$x^2 - 9^2 = 0,$$

e perciò

$$(x-9)(x+9) = 0,$$

ne segue che la equazione è soddisfatta tanto se sia zero il primo che il secondo fattore, tanto cioè col supporre $x = 9$, ovvero $x = -9$. Ecco la dimostrazione che giustifica il doppio segno accordato al valore della x.

Util cosa è però il rimarcare che questo risultato è solo in apparenza diverso dall' antecedente; poichè delle equazioni a due termini la duplicità delle radici è illusoria, cioè $+9 = -9$. Ciò sembrerà un paradosso: eppure il dimostrarlo è facilissima cosa, tanto se si riguardi la soluzione delle equazioni che la soluzione dei problemi.

Per rapporto alla soluzione delle equazioni, non v'è dubbio che -9 è cosa opposta al $+9$, non già perchè sieno quantità di contraria natura, come comunemente si dice, ma perchè il *togliere* è operazione opposta al *porre*. Trattandosi però di equazione di 2° grado a due termini, il -9 e il $+9$ non sono diversi, che per mera apparenza, giacchè essendo il -9 legato alla unica condizione di doversi moltiplicare per sè stesso, e non potendosi perciò staccare l'idea del -9 da tutto il concetto -9×-9, sa ognuno che esprime la me-

E III° traducendo queste equazioni in parole, abbiamo per esse espresso il seguente teorema. Abbiamo cioè in (A) che *il quadrato della semi-somma delle due radici (e in genere di due numeri) diminuito del loro prodotto è uguale al quadrato della loro semi-differenza*; e (B) ci palesa che *il quadrato della semi-differenza delle due radici (e in genere di due numeri) accresciute del loro prodotto è uguale al quadrato della loro semi somma* (a).

Sì poi dalla (A) che dalla (B) otteniamo

$$(C) \ldots\ldots\ mn = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

---

desima cosa e produce il medesimo risultato tanto il -9×-9 che il $+9\times+9$.

Se poi riflettiamo alla soluzione del problema, giungiamo alle medesime conseguenze. Prendendo per radice dell' equazione il $+9$, esso risolve quel quesito che tradotto in linguaggio algebrico è $+x\times+x = 81$, risolve cioè quel quesito in cui si *cerca quel numero che posto le tante volte quante sono le sue unità dà* 81. Prendendo per radice il -9, abbiamo una *soluzione negativa*, la quale, mentre ci avverte che il quesito è assurdo, ci addita in pari tempo (§. 123) il modo di renderlo possibile, dando al suo enunciato una modificazione che corrisponda a quella che si è data alla equazione, cambiando in -9 il $+9$, cosicchè più non avendo $+9\times+9 = 81$, ma invece $-9\times-9 = 81$, diciamo che *il* -9 *risolve quel quesito in cui cercasi quel numero*, *la cui sottrazione tante volte sottratta quante sono le sue unità dà* 81. Coll' usare però queste espressioni che sono vere ugualmente, noi esponiamo sotto altre parole lo stesso problema antecedente, e soltanto adduciamo di più il motivo che ha indotto a porre nove volte il 9. Così se la soluzione del problema $+x\times+x = 81$ ci porta a conoscere per es. che lire 81 è la somma che un bracciante ha depositata nella cassa di risparmio, ponendovi per nove settimane di seguito, ogni settimana nove lire, in pari modo la soluzione del problema $-x\times-x = 81$ ci fa conoscere che lire 81 è la somma, la quale il bracciante ha depositato nella Cassa (nove lire in ogni settimana ponendovi per nove volte) ma di più ci palesa i motivi che a ciò l' hanno indotto. Infatti ci fa conoscere che avendo egli tolto antecedentemente nove lire ogni settimana per nove settimane consecutive dal suo deposito, ora ha voluto togliere questa sottrazione del 9 lire che nove volte avea fatta col fare ritorno da ciò che gli era rimasto alla somma che aveva, prima che nulla vi avesse sottratto, col far ritorno cioè dal residuo al minuendo, riponendo di nuovo nella cassa tutto ciò che avea tolto. Bene così spiegato il valore delle parole, *il* -9 *che si toglie altro non è dunque che il* $+9$ *che si pone*; e quindi sotto una duplice apparenza di $+9$ e di -9 unico è in sostanza il valore di x.

A differenza dunque delle equazioni complete, in cui il duplice segno produce due radici diverse, e quando una di esse è negativa, questa importa una modificazione sostanziale nelle condizioni del problema, le equazioni di 2° grado a due termini, se in grazia del duplice segno hanno tutte *in apparenza* due radici, e sempre di segno diverso, non così hanno due radici *realmente*; poichè la negativa in grazia dell' unica condizione cui è indissolubilmente associata di essere per sè stessa moltiplicata, non cambia affatto nè le condizioni dell' equazione nè quelle del problema. E' dunque evidente che *nelle equazioni di 2° grado a due termini*, *la duplicità delle radici è illusoria; e* $+a = -a$, *che è il paradosso che abbiam preso a dimostrare.*

(a) Ecco la verifica di questo teorema in un particolare esempio, in cui 8 è o la somma o la differenza di due numeri interi, la somma nei primi 5 casi, la differenza nei tre ultimi.

Caso 1.°	$4+4 = 8$;	e $(^8/_2)^2 - 4\times4 = (^0/_2)^2 = 0^2$
Caso 2.°	$5+3 = 8$;	e $(^8/_2)^2 - 5\times3 = (^{5-3}/_2)^2 = 1^2$
Caso 3.°	$6+2 = 8$;	e $(^8/_2)^2 - 6\times2 = (^{6-2}/_2)^2 = 2^2$
Caso 4.°	$7+1 = 8$;	e $(^8/_2)^2 - 7\times1 = (^{7-1}/_2)^2 = 3^2$
Caso 5.°	$8+0 = 8$;	e $(^8/_2)^2 - 8\times0 = (^{8-0}/_2)^2 = 4^2$
Caso 1.°	$9-1 = 8$;	e $(^8/_2)^2 + 9\times1 = (^{9+1}/_2)^2 = 5^2$
Caso 2.°	$10-2 = 8$;	e $(^8/_2)^2 + 10\times2 = (^{10+2}/_2)^2 = 6^2$
Caso 3.°	$11-3 = 8$;	e $(^8/_2)^2 + 11\times3 = (^{11+3}/_2)^2 = 7^2$

ec. all' infinito.

otteniamo cioè IV° per corollario dell' esposto teorema che *il prodotto delle due radici (e in genere di due numeri) è sempre uguale al quadrato della loro semi-somma diminuito dal quadrato della loro semi-differenza ;* ond' è che se un dato numero si spezzi in due parti m ed n, il prodotto mn di queste sarà tanto più piccolo, quanto maggiore è la loro differenza, e diverrà il massimo, quando questa differenza sia nulla, quando cioè si sarà il numero diviso in due parti uguali, quando cioè sia $m = n$.

Dalla (C) pure risulta V° che *determinata che sia la somma* $m+n$, *il prodotto* mn *può indefinitamente impiccolirsi* coll' accrescere indefinitamente la differenza fra m ed n il che può ottenersi spezzando il tutto in due parti m ed n tali, che n divenga una frazione sempre più tenue: *non può però mn indefinitamente crescere, avendo un limite in* $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$. Così per esempio essendo $m+n = 10$, spezzando il 10 in $9+1$, abbiamo $mn = 9$: spezzando il 10 in $9{,}999+0{,}001$ abbiamo $mn = 0{,}009999$; e col rendere n sempre più tenue, potremmo indefinitamente sempre più impiccolire mn: non possiamo però rendere mn maggiore di 25, poichè mn ha per limito massimo $\left(\frac{5+5}{2}\right)^2 = 25$.

VI° Finalmente osservando la (O) rimarchiamo che estratta la radice dalla quantità sotto il segno, essa è la semi-differenza algebrica delle due radici dell' equazione, che se si aggiunge alla semi-somma che la precede, è chiaro, che dar debbe la radice maggiore; e se dalla semi-somma si toglie, dar debbe la radice minore; giacchè sappiamo (§. 2 e 154) che di due numeri il maggiore è sempre uguale alla semi-somma loro, più la loro semi-differenza; ed il minore è uguale alla loro semi-somma, meno la semi-differenza.

Quindi se amiamo conoscere in che consista l' artificio per sciogliere un' equazione di 2° grado qualunque, eccolo.

I°. L' equazione si riduce alla semplice formola generale, affine di avere in $-c$ la somma, ed in $+a$ il prodotto dei due valori della incognita.

II° Nota la loro somma e prodotto, giungiamo a conoscere la loro semi-differenza, che pel teorema ora esposto si ha, togliendo il loro prodotto dal quadrato della loro semi-somma, ed estraendo la radice dal residuo.

III° Nota la loro semi-differenza, l' aggiungiamo alla semi-somma, ed otteniamo il numero maggiore: la togliamo dalla semi-somma, ed otteniamo il minore.

332. Ponendo poi mente al segno reale da cui nei diversi casi particolari possono essere affette, ed ai rapporti per differenza che possono avere tra di loro le quantità che sono sotto il vincolo radicale nella formola $x = -c/2 \pm \sqrt{(c^2/4 - a)}$, veniamo in cognizione se la x abbia valori *immaginari* o *reali*. Infatti in tutti i casi nei quali il $+a$ della formola generale è una quantità negativa, e quindi è positivo il $-a$, ne segue che (essendo sempre positivo il $c^2/4$ perchè è un quadrato) positiva e perciò reale è allora la somma del-

---

Dalla osservazione poi che l' 8 è la somma di quattro diverse paia di numeri interi e nulla più risulta che sole quattro diverse equazioni di 2° grado si possono formare che abbiano radici ambe col medesimo segno $+$ e razionali, e intere, posto -8 per coefficiente della x, cioè

$$x^2 - 8x + 4\times4 = 0$$
$$x^2 - 8x + 5\times3 = 0$$
$$x^2 - 8x + 6\times2 = 0$$
$$x^2 - 8x + 7\times1 = 0$$

E dall' osservazione poi che indefinito è il numero dei casi nei quali può esser 8 la differenza di due numeri, ne segue che indefinito è pure il numero delle equazioni di 2° grado aventi radici razionali, e con segno diverso che possono formarsi, posta sempre la stessa -8 per coefficiente della x, ne segue cioè che

$$x^2 - 8x - 9\times1 = 0$$
$$x^2 - 8x - 10\times2 = 0$$
$$x^2 - 8x - 11\times3 = 0$$

ec. all' infinito.

Possono pure formarsi equazioni di 2° grado in cui non più -8 come sopra, ma $+8$ sia il coefficiente di x, in cui cioè i primi due termini sieno x^2+8x; ed allora -8 esser debbe la somma algebrica delle radici. E con ragionamento analogo all' ora esposto facilmente rileviamo, che di equazioni diverse, aventi però tutte x^2+8x pel primo e secondo termine se ne possono formare sole quattro con radici razionali ed intere affette ambedue dal $-$; e se ne può formare un numero indefinito aventi la radice maggiore affetta dal segno $-$ e la minore dal $+$.

le quantità sotto il segno; e quindi reali ambi i valori della x. In que' casi poi, nei quali $+a$ è positiva, e quindi negativo è il termine $-a$, si può dare che si abbia o I. $a < c^2/_4$, o II. $a = c^2/_4$, o III. $a > c^2/_4$; ed è chiaro che la quantità sotto il vincolo radicale è positiva nel 1° caso, e perciò reali sono i valori della x: nulla è nel 2° caso, e perciò unico è allora il valore della x, poichè la formola di risoluzione diviene $x = -c/_2 \pm \sqrt{0} = -c/_2$: nel 3° caso la quantità sotto il segno radicale è negativa, e perciò immaginari i valori della x.

III Osservazioni su i rapporti di differenza fra la quantità che precede, e quella che segue il doppio segno.

333. Nella equazione finale $x = -c/_2 \pm \sqrt{(c^2/_4 - a)}$ può avvenire che il $c/_2$ sia o minore, o uguale, o maggiore della quantità radicale che lo segue, e in ciascuno di questi casi è d'uopo osservare da quali segni sieno affette le radici delle equazioni.

1° Sia $c/_2 < \sqrt{(c^2/_4 - a)}$. In tal caso il $c/_2$, o venga aggiunto, o venga tolto alla quantità radicale, avverrà sempre che la somma o il residuo espresso dal secondo membro dell' equazione finale serbi il segno della quantità radicale che è maggiore, di $c/_2$; e perciò la x avrà il segno $+$ allorchè si accorda al radicale il segno superiore, e viceversa. Le radici hanno dunque segno diverso quando $c/_2 < \sqrt{(c^2/_4 - a)}$ ovvero (alzando ambi i membri a quadrato) quando $c^2/_4 < c^2/_4 - a$, ossia quando $-a$ è una quantità positiva, ossia in tutti quei casi nei quali il $+a$ della formola generale a zero ridotta è una quantità negativa. Ed in vero quando a che esprime il prodotto delle due radici è negativo, uopo è che i suoi fattori abbiano segno diverso perchè non risulta un prodotto affetto dal $-$ che dal $- \times +$ o dal $+ \times -$.

II°. Sia $c/_2 = \sqrt{(c^2/_4 - a)}$. In questo caso la x ha un solo valore uguale al $-c$; poichè l' esposta uguaglianza esigo che sia vero ancora ciò che risulta dall' alzare i suoi membri a quadrato, che sia cioè $c^2/_4 = c^2/_4 - a$, il che importa che sia $a = 0$, nel qual caso (§.327) si ha $x = -c$.

III°. Sia $c/_2 > \sqrt{(c^2/_4 - a)}$. In questo caso o si aggiunga o si tolga al $c/_2$ la quantità radicale, la somma o il residuo espresso dal 2° membro della equazione finale avrà sempre il segno di $c/_2$ che è maggiore della quantità radicale. E poichè nella formola di risoluzione il $c/_2$ è affetto dal segno $-$, segno opposto a quello che nella formola generale ha il coefficiente del 2° termine che è $+c$, così la x avrà sempre il medesimo segno opposto a quello che ha il coefficiente del 2° termine, o sia che al radicale si conceda il superiore ovvero il segno inferiore. Le radici dell' equazione hanno dunque sempre il medesimo segno ed opposto a quello del coefficiente del 2° termine, quando $c/_2 > \sqrt{(c^2/_4 - a)}$, ovvero quando (alzando ambi i membri a quadrato) si ha $c^2/_4 > c^2/_4 - a$, ossia quando $-a$ è realmente una quantità negativa, o ciò che è lo stesso in tutti que' casi nei quali il $+a$ quale esiste nella formola generale ridotta a zero, è una quantità positiva. E che debbano le radici avere lo stesso segno, ed opposto a quello del coefficiente del 2° termine quando a è affetto dal $+$, chiaro risulta ancora, se riflettiamo che avendo il prodotta a il segno $+$, segni uguali deggiono avere i suoi fattori (§.26); e poichè quando hanno segni uguali, dello stesso segno debbe essere affetta l' algebrica loro somma, ne segue che, dovendo il segno di questa essere opposto a quello di c, (§.307) opposto a quello di c esser pur debbe il segno che ha l' una e l' altra radice.

Compinta l' analisi della formola generale delle equazioni di 2° grado e della sua risoluzione, siamo in grado di conoscere quali proprietà queste equazioni ci offrono nelle diverse particolari loro condizioni.

Proprieta' delle equazioni di 2° grado considerate sotto tutte le possibili combinazioni che riguardo ai segni hanno i loro termini.

* 334. Sotto la formola generale $x^2 + cx + a = 0$, in cui hanno i segni un valore algebrico sono compreso le quattro seguenti equazioni per le quali vengono espresse tutte le possibili diverse combinazioni che riguardo ai segni presi nel loro reale valore ci offrono i termini cx, ed a.

(B) $x^2 - cx + a = 0$ (D) $x^2 + cx + a = 0$

(E) $x^2 + cx - a = 0$ (F) $x^2 - cx - a = 0$

Di queste quattro prima esamineremo le due (B) e (D), in cui a è positiva, poscia le altre due (E) ed (F), in cui a è negativa; e vedremo come in ciascuno di questi casi le nostre riflessioni portate sulla formola generale ci rechino a quello conseguenze medesime cui ci reca la formola di risoluzione.

Proprietà delle equazioni di 2.º grado quando il terzo termine a è positivo.

* 335. Delle due equazioni che hanno positivo il terzo termine, la (B) ci offre tre proprietà interessanti.

I°. Le due radici sono sempre positive. Infatti questa equazione trasformata che siasi in $x^2+a = cx$, ci esprime che si cerca un numero il quale alzato a quadrato od accresciuto di a sia uguale al numero stesso preso c volte. Ed è facile il rilevare, che oltre a un numero m che soddisfa a queste condizioni, ve ne può essere anche un altro n maggiore o minore di m, che vi soddisfi pur esso; poichè se in questo secondo caso il primo membro x^2+a sarà certamente o più piccolo o più grande di quello che era m^2+a, potrà ben essere uguale al secondo membro cx, giacchè cx pure non rimane il medesimo di prima, crescendo o decrescendo anch' esso con l'aumento o con la diminuzione di x. Così come 3 alzato a quadrato e accresciuto di 15 è uguale allo stesso 3 posto otto volte, così pure 5 alzato a quadrato e accresciuto di 15 è uguale allo stesso 5 posto otto volte; e l'Algebra conferma il nostro ragionamento, addimostrandoci (§.333.III.) che l'equazione ha due radici positive, e che la radice n, è ciò che aggiungere conviene all'altra m, per essere uguale al $-c$ della formola generale (§.307). Il 5 è di fatto ciò che al 3 manca per formare 8; ed ambe le radici 3 e 5 troviamo, risolvendo la equazione $x^2+15=8x$. Questo è l'unico caso in cui le due radici sono positive, e in cui perciò i problemi di 2° grado hanno realmente due soluzioni.

II°. Le *radici sono entrambe sempre minori di c coefficiente del* 2° *termine della formola*. Infatti essendo $x^2+a=cx$, è chiaro che x^2 ha bisogno di $+a$ per essere uguale al termine cx; e perciò $x^2<cx$, e quindi $x<c$. Così le due radici 3 e 5 sono minori di 8 nel proposto esempio.

III°. Il terzo termine a può essere indefinitamente più piccolo, ma non già indefinitamente più grande di c. Quando si è dato alla c un valore determinato, a può essere più piccola di c quanto si voglia: poichè per quanto c sia grande, noi possiamo (col rendere il fattore x ben piccolo e frazionario se occorra) formare nella $x^2+a = cx$ il prodotto cx piccolo in guisa che eguagli il 1° membro. Non può essere all' opposto a quanto si voglia più grande di c. Infatti a non può ingrandire senza render più grande il primo membro. Non può divenire più grande il primo membro senza che ingrandisca ancora il secondo. Non può ingrandire il secondo senza che ingrandisca x, giacchè c essendo determinata, non soffre alterazione. Non può dunque ingrandire indefinitamente a senza che indefinitamente ingrandisca anche x. Ma x non può indefinitamente ingrandire, perchè debbe serbarsi minore di c (§.335.II). Perchè dunque a potesse indefinitamente ingrandire, uopo sarebbe, che oltre un dato limite la x ingrandisse, e non ingrandisse nel medesimo tempo: ingrandisse affinchè potesse il 2° membro uguagliare il primo, non ingrandisse affinchè cx si serbasse minore, come debbe essere, di x^2.

E questo impossibile non è modificabile per qualunque cambiamento che diasi alla x sì nel *segno* che nel *quantitativo*. Non giova il cambiamento del suo segno, giacchè allora in vece di $x^2-cx+a = 0$, avremmo $x^2+cx+a = 0$ che ci manifesta l'assurda pretensione che la somma di tre quantità tutte positive sia zero. Non giova il cambiamento nel quantitativo della x, poichè qualunque valore positivo le si dia, non può ad un tempo esser più grande e più piccolo, come si richiederebbe che fosse. E questa impossibilità immodificabile di potere dare ad a un valore grande a capriccio l' Algebra nell' esposta analisi ce l'ha dimostrata col precisarci che le radici sono reali finchè il terzo termine a non eccede $c^2/_4$, finchè cioè non eccede il quadrato del semi-coefficiente del 2° termine; o sono immaginarie quando lo eccede (§.332). Così se invece di $x^2+15 = 8x$, si avesse $x^2+17 = 8x$, l'impossibilità dell'equazione sarebbe annunziata dalle due radici immaginarie

$$x = 4+\sqrt{-1}\ ;\ e\ x = 4-\sqrt{-1}$$

L'altra delle due sole equazioni in cui a è positiva, è al (§.334) (D)....$x^2+cx+a = 0$, la cui impossibilità è manifesta, perchè esige che la somma di tre termini positivi sia zero, e l'analisi algebrica ce lo

ha dimostrato col farci conoscere (§.333,III) essere in questo caso le radici affette entrambe dal segno opposto a quello del coefficiente del 2° termine, e perciò affette dal segno —. Mentre però le radici negative ci dichiarano assurdo il problema, ci additano in pari tempo la soluzione di un altro, il cui concetto possiamo facilmente proporre, traducendo in parole l'equazione del problema impossibile dopo di avere in essa cambiato il segno ai termini che contengono la semplice x. E poichè questo cambiamento altra mutazione non produce nella equazione ridotta alla forma generale che la trasformazione di $+cx$, in $-cx$, ciò mostra che l'assurda equazione (D) al (§.334) non diviene risolvibile se non quando è trasformata nell'antecedente (B).

Conchiudiamo perciò che *quando nella formola generale il terzo termine* a *è positivo; 1° è impossibile, che lo sia anche il secondo; ed essendolo, la impossibilità è manifestata dalle radici che sono negative entrambe. 2° Essendo poi il 2° termine negativo, le due radici sono sempre positive; 3° sempre minori del coefficiente del secondo termine; 4° immaginarie in tutti que' casi nei quali* $a > c^2/_4$.

Proprietà delle equazioni di 2° grado quando il terzo termine è negativo.

* 336. Appartengono a questo caso le due equazioni (E) ed (F) poste al (§.334) e queste trasformate in

$$(G)...x^2+cx = a,\ (H)...x^2-cx = a$$

ci addimostrano le tre seguenti rimarchevoli proprietà.

I.° *Le due radici hanno segno diverso.* Ed in vero, trovato un numero m che sostituito ad x soddisfi all'equazione, verun altro maggiore o minore può soddisfarvi; giacchè è evidente che sostituito darebbe una somma nel 1° membro di (G), e un residuo nel 1° membro di (H) maggiore o minore di a (che è il 2° membro) mentre per soddisfare all'equazione, dovrebbe essergli uguale. Quindi una sola radice positiva può soddisfare al problema. Ma lo stesso numero a ognun vede esser possibile ad ottenersi, se invece di m si dia ad x un valore maggiore, e quindi questo o si tolga c volte dal suo quadrato in vece di aggiungerlo come è in (G), ovvero c volte venga aggiunto invece che gli sia tolto, come è in (H), giacchè per es. lo stesso 45 si ottiene tanto se al quadrato di 5 si aggiunga il 5 quattro volte, quanto se dal quadrato di 9 il 9 si tolga quattro volte. E queste osservazioni sono confermate dall'analisi algebrica, la quale ci addimostra (§.333. I.) che quando a è negativa, le radici hanno segno diverso, con che viene a significarci che dalla sola radice positiva è soddisfatto il problema: ma che havvi in pari tempo una soluzione negativa che ci mostra potersene anche un altro sciogliere dipendente dal primo. Così proponendoci *di trovar quel numero che aggiunto quattro volte al suo quadrato dia 45*, le due radici $+5$ e -9, che otteniamo, ci mostrano che unicamente dal 5 è soddisfatto il problema; e il -9 ci fa conoscere che se venisse proposto quest'altro problema, *la ricerca cioè di un numero che tolto 4 volte dal suo quadrato dia 45*, questo chiesto numero sarebbe il 9.

II.° *Delle due radici la positiva* (ossia quella che soddisfa al problema) *è la minore, quando si ha* $+cx$ *per 2° termine, come è in* (G): *è poi la maggiore quando si ha* $-cx$ *come è in* (H). È chiaro infatti che la somma algebrica delle radici ha il segno della maggiore: ma questa somma ha un segno opposto a quello del termine cx: dunque la radice maggiore è affetta dal segno opposto a quello di cx; e perciò è negativa in (G) e positiva in (H); ossia quando il cx è positivo, essendo allora negativa la radice maggiore, positiva è la radice minore; ed invece positiva è la maggiore, quando il termine cx è negativo.

III.° Sotto qualsiasi valore dato a capriccio ad a ed a c le equazioni sono sempre possibili. Ed in vero può sempre darsi alla x un valore che soddisfi tanto alla equazione (G) quanto alla (H); poichè se rimanendo costante c, si ingrandisca o impiccolisca a, che è il 2° membro, quanto si voglia, è chiaro che potremo ugualmente ingrandire o impiccolire il 1° membro collo ingrandire x o coll'impiccolirlo a segno che sia frazionario ancora se occorra; e così potrà sempre ottenersi $x^2+cx = a$, ovvero $x^2-cx = a$. E dall'analisi algebrica ciò è confermato allorchè ci addimostra che quando a è negativa, le radici sono sempre reali (§.332).

Conchiudiamo perciò che *quando nelle formole generali il terzo termine* a *è negativo, 1° le due radici hanno segno contrario: 2°: di queste positiva è sempre la minore, quando* cx *è positivo, e positiva è la maggiore, quando* cx *è negativo: e 3° che non si hanno mai radici immaginarie.*

* 337. La soluzione dei problemi non va confusa con quella delle equazioni. Ed in vero le equazioni di 2° grado complete ad eccezione del caso di $+a = c^2/_4$, in cui la soluzione è unica, ci offrono sempre due radici, e quindi due soluzioni; poichè le due radici o sieno I° entrambe razionali positive, o II° ambe razionali, l'una positiva, l'altra negativa, o III° entrambe razionali negative, o IV° l'una razionale e l'altra irrazionale reale, o V° l'una razionale e l'altra immaginaria, o VI° ambe irrazionali reali, o VII° ambe irrazionali, ma l'una reale e l'altra immaginaria, o VIII° immaginarie entrambe, da queste radici l'equazione è sempre soddisfatta. I problemi di 2° grado al contrario non hanno mai due soluzioni esatte che nell'unico I° caso di ambe le radici razionali positive, per lo che si esige che il termine a sia positivo, e sia prodotto di due numeri, la cui somma reale sia $-c$. Il problema infatti non è sciolto dalle radici immaginarie: nemmeno lo è a rigore dalle radici irrazionali reali; e nemmeno dalle radici razionali negative. Però

L'impossibilità annunciata dalle radici immaginarie è affatto immodificabile (§.335).

L'impossibilità annunziata dalle radici irrazionali reali è immodificabile anch'essa, ma ammette a differenza delle immaginarie una soluzione approssimativa (§.256).

L'impossibilità annunziata dalle radici negative è modificabile allorquando le condizioni del problema possono con un cambiamento adattarsi al cambiamento del segno in tutti i termini che contengono la x semplice (§.335).

ESERCIZIO

Equazioni di 2° grado aventi positivo il terzo termine noto

Ambedue le radici affette dal segno +	Ambedue le radici affette dal segno —
Radici razionali intere e fratte	
$x^2-15x+56=0$ dà $x=7$ e $=8$	$x^2+15x+56=0$ dà $x=-7$ e $=-8$
$x^2-{}^9/_{10}x+{}^7/_{50}=0$ dà $x={}^7/_{10}$ e $={}^2/_{10}$	$x^2+{}^9/_{10}x+{}^7/_{50}=0$ dà $x=-{}^7/_{10}$ e $=-{}^2/_{10}$
Radici irrazionali reali intere e fratte	
$x^2-10x+7=0$ dà $x=5\pm\sqrt{18}$	$x^2+10x+7=0$ dà $x=-5\pm\sqrt{{}^2/_{10}}$
$x^2-2x+{}^1/_2=0$ dà $x=1\pm\sqrt{{}^1/_2}$	$x^2+2x+{}^1/_2=0$ dà $x=-1\pm\sqrt{{}^1/_2}$
Radici irrazionali immaginarie intere e fratte	
$x^2-8x+17=0$ dà $x=4\pm\sqrt{-1}$	$x^2+8x+17=0$ dà $x=-4\pm\sqrt{-1}$
$x^2-15x+60=0$ dà $x={}^{15}/_2\pm\sqrt{-{}^{15}/_4}$	$x^2+15x+60=0$ dà $x=-{}^{15}/_2\pm\sqrt{-{}^{15}/_4}$

Equazioni di 2° grado aventi negativo il terzo termine noto

La radice minore e' affetta dal +	La radice maggiore e' affetta dal +
Radici razionali intere e fratte	
$x^2+8x-65=0$ dà $x=5$ e $=-13$	$x^2-8x-65=0$ dà $x=13$ e $=-5$
$x^2+{}^{29}/_{35}x-{}^6/_{35}=0$ dà $x={}^6/_{35}$ e $=-1$	$x^2-{}^{29}/_{35}x-{}^6/_{35}=0$ dà $x=1$ e $=-{}^6/_{35}$
Radici irrazionali reali intere e fratte	
$x^2+8x-15=0$ dà $x=-4\pm\sqrt{31}$	$x^2-8x-15=0$ dà $x=4\pm\sqrt{31}$
$x^2+10x-2=0$ dà $x=-5\pm\sqrt{27}$	$x^2-10x-2=0$ dà $x=5\pm\sqrt{27}$

338. Ed utile esercizio sarà per ciascuno di questi esempi verificare le molte proprietà che nelle equazioni di 2° grado abbiamo scoperte. Così dopo avere ottenute le radici 3 e 2, nella risoluzione della equazione $x^2-5x+6 = 0$, supponendone nota una sola, e per es. il 3, notiamo I° che l'altra radice debbe essere la data 3 più il (—5) coefficiente del 2° termine presi col segno contrario (§.310), e perciò esser debbe $-3+5$: ed infatti $-3+5 = 2$. II° Che dividendo x^2-5x+6 per $x-3$, debbe risultare per quoto un fattor binomio, i cui termini sono x e l'altra radice presa col segno contrario (§.312); ed infatti otteniamo $x-2$: III°, che moltiplicando $x-3$ per $x-2$, risulta realmente la data equazione (§.311): IV° che addizionando le due radici 3 e 2, ne risulta per somma il coefficiente 5 del 2° termine: V° che moltiplicando l'una per l'altra, risulta per prodotto il termine noto 6 (§.314). VI. Che il quadrato della loro semi-somma $^5/_2$ ossia $^{25}/_4$ diminuito del loro prodotto 6 è uguale ad $^1/_4$ quadrato della loro semi-differenza che è $^1/_2$.

SEZIONE VIII.

Teoria delle ragioni, proporzioni e progressioni algebriche per differenza e per quoto (a).

339. Le nozioni delle ragioni, proporzioni e progressioni sì per differenza che per quoto date in Aritmetica, i ragionamenti ivi esposti per dimostrarne le principali proprietà, e i modi pur anche di esprimerle (sol che si avverta che alle cifre vanno ora sostituite le lettere) non soffrono il menomo cambiamento in questo trattato delle ragioni, proporzioni, e progressioni algebriche, giacchè queste non sono che quelle considerate sotto un aspetto il più generale. Richiamato perciò al pensiero quanto in Aritmetica si è osservato in proposito, occasione ci si darà ora di rilevare quanto il laconismo algebrico col porre sotto un colpo d'occhio per mezzo di forme analitiche gli intrinseci rapporti che passano fra i termini delle ragioni, proporzioni e progressioni, più brevemente e agevolmente addimostri, e quelle proprietà stesse che furono in Aritmetica esaminate, e molte altre che da quelle formole agevolmente derivano, e come appieno l'intelletto convinca che quelle proprietà addimostrate si verificano in tutti i casi particolari possibili.

RAGIONI, PROPORZIONI E PROGRESSIONI PER DIFFERENZA E LORO PROPRIETA'.

Ragioni e proporzioni per differenza.

340. Se nella espressione di una ragione per differenza $a \,.\, g$ vogliamo che sia indicata la derivazione del conseguente dall'antecedente, conviene notare che il conseguente non è che l'antecedente a, più o meno la differenza d. Quindi $a \,.\, a+d$ è la formola analitica e generale di qualunque ragione per differenza $a \,.\, g$, avvertendo che il $+$ ha significato algebrico, e che d esprime una differenza tanto *additiva* che *sottrattiva*.

341. Avendosi ora una proporzione qualunque per differenza

$$(A)...a \,.\, g = c \,.\, h$$

è chiaro che il secondo conseguente h non è che l'antecedente c più la stessa diffe-

(a) Le ragioni, proporzioni, e progressioni per differenza chiamansi anche *aritmetiche*: e *geometriche* quelle per quoto. Queste denominazioni sono però poco esatte, perchè mentre non ispiegano l'intrinseca natura delle ragioni ec., conducono poi all'errore di credere che la ragione, proporzione e progressione *aritmetica* sia dell'Aritmetica esclusivamente propria, quandochè può ben cadere in acconcio sulle quantità estese della Geometria; e la così detta *geometrica* appartenga esclusivamente alla Geometria, quandochè non è meno aritmetica di quella che porta un tal nome, servendo alla soluzione di una infinità di problemi, i cui numeri non hanno che far nulla colle geometriche quantità. I nomi d'altronde che noi abbiamo adottato non solo corrispondono alle nozioni che dobbiamo annettervi, ma le contraddistinguono per una essenziale loro caratteristica: ed è per questa ragione che molti moderni trattatisti ben convinti di quanto influisca l'esattezza dei segni su quella delle idee, le hanno poste in uso dietro l'esempio di un sommo Matematico quale si fu l'Italiano Lagrangia che per primo ha in questa parte di Algebra rettificato il linguaggio.

renza d valore della prima ragione, cui la seconda è uguale. Quindi la proporzione (A) può trasformarsi nella seguente analitica.

$$(B)\ldots a\ .\ a+d = c\ .\ c+d$$

la quale chiamasi *formola generale delle proporzioni per differenza* perchè tutte le abbraccia, ed anche *analitica* perchè facendoci rimarcare la derivazione dei conseguenti dagli antecedenti, viene a darci l'analisi della loro costituzione.

342. Chiaro poi da questa formola apparisce che *la somma dei medi è uguale a quella degli estremi*; giacchè $a+c+d$ somma di questi risulta dei termini stessi $a+d+c$ somma dei medi. Quindi in ogni proporzione per differenza $p\ .\ r = s\ .\ t$ abbiamo $p+t = r+s$, donde $p = r+s-t$; e $t = r+s-p$; ed $r = p+t-s$, ed $s = p+t-r$; cioè *ogni estremo è uguale alla somma dei medii diminuita dell' altro estremo: ogni medio è uguale alla somma degli estremi diminuita dell' altro medio.*

343. Se poi all' opposto vi sieno quattro termini tali, che la somma degli estremi uguagli quella dei medii, essi formano una proporzione. Ed in vero se esprimiamo con $a\ .\ a+d$ la ragione dal 1° al 2°, e con $e\ .\ e+d'$ la ragione del 3° al 4°, contraddistinguendo appunto la d valore di questa ragione con un accento per denotare che non possiamo esprimerla con lo stesso segnale d con cui abbiamo espresso il valore della prima, perchè ignoriamo se le sia uguale, noi abbiamo per ipotesi la somma $a+e+d'$ del 1° e 4° termine eguale ad $a+c+d$, somma del 2° o 3°: vediamo perciò che gli stessi due antecedenti $a+e$ danno la stessa somma sì uniti alla d che alla d', lo che essere non potrebbe se non fosse $d = d'$. E se $d = d'$, ciò è dire che le due ragioni hanno lo stesso valore, ossia formano una proporzione.

344. Se la proporzione è continua; poichè in essa il 3° termine debbe essere uguale al termine 2°, la sua formola analitica sarà $a\ .\ a+d = a+d\ .\ a+d+d$, ovvero, (scrivendo il medio proporzionale una volta sola) sarà

$$\div\, a\ .\ a+d\ .\ a+2d$$

in cui è evidente che $a+a+2d$ somma degli estremi è uguale a $2(a+d)$ doppio del medio proporzionale. Quindi in ogni proporzione continua $\div\, m\ .\ n\ .\ r$, si ha $m+r = 2n$, donde $m = 2n-r$, ed $r = 2n-m$, ed $n = {}^{(m+r)}/_2$, cioè *ogni estremo è uguale al doppio del medio proporzionale diminuito dell' altro estremo; ed il medio proporzionale è uguale alla semi-somma degli estremi*; cosicchè *se è ignoto un estremo, desso si trova sottraendo dal doppio del medio proporzionale l' estremo noto; e se è ignoto il medio proporzionale, il suo valore si trova, prendendo la semi-somma degli estremi*. Così « Se nella costruzione di una fabbrica vuolsi che il terzo piano superi l' altezza del secondo, la quale è di 8 metri, di quanto il secondo piano supera il primo che è alto metri $6+{}^1/_4$, avremo la proporzione continua $\div\, 6+{}^1/_4\ .\ 8\ .\ x$, donde $x = 16-(6+{}^1/_4) = 9+{}^3/_4$.

« Se vogliamo costruire una torre che abbia un' altezza che sia media di quella di un obelisco alto metri 120, e di un palazzo alto metri 96, avremo $\div\, 120\ .\ x\ .\ 96$, donde $x = {}^{(120+96)}/_2 = 108$ ».

Progressioni per differenza.

345. Le progressioni per differenza sono una continuazione delle proporzioni continue, perchè sono serie di termini tali che di quanto il secondo differisce dal 1°, di tanto il 3° differisce dal 2°, il 4° dal 3° ec. e perciò la loro formola è una continuazione della formola delle proporzioni continue. Chiamata perciò d la differenza costante valore di tutte le ragioni uguali che costituiscono la seguente progressione di un numero n di termini

$$\div\, a\ .\ f\ .\ g\ .\ h\ .\ \ldots\ .\ r\ .\ t\ .\ u$$

è chiaro che ogni successivo termine non è che il rispettivo antecedente più d; e che perciò

Il 1° termine è a			. . . .	$= a$		
Il 2°	f	$= a+d$	. . . .	$= a+$		$1d$
Il 3°	g	$= f+d$	$= (a+\ \ 1d)+d$	$= a+$		$2d$
Il 4°	h	$= g+d$	$= (a+\ \ 2d)+d$	$= a+$		$3d$

. . . .

L'antepenultimo $r = \ldots\ldots = (a+(n-4)d+d = a+(n-3)d$

Il penultimo . . $t = r+d = (a+(n-3)d+d = a+(n-2)d$

L'ultimo . . . $u = t+d = (a+(n-2)d+d = a+(n-1)d$

donde

$$(C) \div a \;.\; a+1d \;.\; a+2d \;.\;.\;.\; a+(n-3)d \;.\; a+(n-2)d \;.\; a+(n-1)d$$

346. In questa formola analitica delle progressioni per differenza di un numero n di termini, è poi ben facile il rilevare 1°, che i termini vanno successivamente crescendo, formano cioè una *progressione crescente*, se d, è additiva, e vanno diminuendo, formano cioè una *progressione decrescente*, se d è sottrattiva; 2° che ciascuno di essi deriva dal 1° termine a, altro non essendo che lo stesso a più la differenza d moltiplicata pel numero dei termini che lo precedono; e che perciò l'ultimo termine è espresso dall'interessante formola $u = a+(n-1)d$: 3° che questa formola può anche essere considerata come esprimente non solo l'ultimo termine, ma un termine qualunque. Ed infatti facendo $n = 1$, abbiamo $u = a$: facendo $n = 2$, abbiamo $u = a+d$, facendo $n = 3$, abbiamo $u = a+2d$, ec. Perciò $a+(n-1)d$ dicesi il *termine generale* della progressione per differenza, e ci esprime: *che un di lei termine qualunque è uguale al primo accresciuto del prodotto che dà il numero dei suoi termini diminuito di 1 e moltiplicato per la differenza;* e serve a sciogliere questo problema. *Dato il primo termine e la differenza, si trovi un termine qualunque senza passare per gli intermedi*. Così se cercbisi per esempio il *quinto termine* della progressione crescente che ha 3 per termine primo, e 7 per differenza, fatto $n = 5$, $a = 3$, $d = 7$, e chiamato u il quinto termine cercato, trovasi $u = 3+4\times7 = 31$.

347. Un'altra formola analitica interessante è quella che ci esprime la *somma* di tutti i termini di una progressione per differenza. Per ottenerla, si esprima per s la somma del totale numero n dei suoi termini: si faccia una eguaglianza, della quale il 1° membro sia s, ed il 2° sia l'assieme di tutti i successivi termini della progressione uniti col $+$ e segnati secondo il naturale loro ordine: sotto questa eguaglianza se ne scriva un'altra, il cui 1° membro sia parimenti s, e il 2° sia costituito da tutti gli stessi termini della progressione, che trovansi nel 2° membro della prima eguaglianza, segnati però in ordine retrogrado, in modo cioè, che sotto il primo si trovi l'ultimo termine, sotto il secondo il penultimo, ec.: poi di queste due eguaglianze si faccia la somma, addizionando nel secondo membro a due a due i termini che si corrispondono in colonna; e fatta la riduzione, si scrivano i rispettivi risultati sotto i termini sommati in una terza fila, come vedesi qui sotto.

$$(I)\ldots\; s = a \quad + a \quad +d \quad +\ldots+\; a+(n-2)d \quad + a+(n-1)d$$

$$(II)\ldots\; s = a+(n-1)d \quad + a+(n-2)d \quad +\ldots+\; a+ \quad d \quad + a$$

$$(D).\; 2s = 2a+(n-1)d \quad +2a+(n-1)d \quad +\ldots+2a+(n-1)d \quad +2a+(n-1)d$$

'vremo così la eguaglianza (D) somma delle due superiori, dalle quali rilevasi che $2s$ è uguale alla quantità $2a+(n-1)d$ ripetuta per quanto è il numero dei termini della progressione, ossia che $2s = n(2a+(n-1)d) = n(a+a+(n-1)d)$. Ma $a+(n-1)d = u$ (§.346): dunque $2s = n(a+u)$; o finalmente $s = {}^n/_2(a+u)$, formola la quale ci esprime il valore della s, ossia del così detto *termine sommatorio*, significandoci che, *la somma di tutti i termini d'una progressione per differenza è uguale alla metà del numero dei termini moltiplicata per la somma degli estremi*.

348. Le due formole o equazioni esprimenti l'una il *termine generale* (§.346) l'altra il *termine sommatorio* (§.347) cioè

$$(E)\ldots u = a+(n-1)d\;;\;(F)\ldots s = {}^n/_2(a+u),$$

sono interessantissime. Ognuna di esse contiene *quattro* dei *cinque* elementi che trovansi in tutte le progressioni per differenza, e che sono a primo termine, u termine ultimo o *ennesimo* o generale, d dif-

ferenza, *n* numero, ed *s* somma dei termini della progressione. Ora se di questi *cinque* elementi, due sieno ignoti, possono determinarsi per mezzo degli altri *tre* dati, giacchè quand' anche non una sola, ma ambedue le incognite si trovassero e nella formola (E) e nella (F) (ed è questo il caso che presentar possa la maggiore difficoltà) il problema in cui, *dati* TRE *dei* CINQUE *elementi di una progressione, si cerca l' uno e l' altro ignoto*, sarebbe sempre determinato e risolvibile, perchè se ci presenta due incognite, ci presenta ancora in (E) ed in (F) due equazioni, ossia quanto occorre per iscuoprirne il valore in tutti i casi. Questi poi sono *venti*, poichè ognuno dei *cinque* elementi può essere cercato sotto *quattro* condizioni diverse, potendo fra gli altri quattro 1°, 2°, 3° e 4°, i tre noti essere o il 1°, 2°, 3°; o il 1°, 2°, 4°; o il 1°, 3°, 4°; o il 2°, 3°, 4°. Per ognuno dunque di questi diversi venti casi, ad eccezione dei due contemplati dalle stesse equazioni fondamentali (E) ed (F) conviene o da una sola di esse o da ambedue, se occorra, dedurre la formola indicante il valore di ciascuno dei cinque elementi; e la verifica delle seguenti nell' indicato modo dedotte sarà di utilissimo esercizio agli Allievi.

	Ignote	Date	Formole
I.		d,n,s	$a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2}$
II.	a	d,n,u	$a = u - d(n-1)$
III.		d,s,u	$a = {}^{d}/_{2} \pm \sqrt{(d^2/_4 + du + u^2 - 2ds)}$
IV.		n,s,u	$a = {}^{2s}/_{n} - u$
V.		a,u,s	$d = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}$
VI.	d	a,n,u	$d = \frac{u-a}{n-1}$
VII.		a,s,u	$d = \frac{u^2 - a^2}{2s - a - u}$
VIII.		n,s,u	$d = \frac{2(nu - s)}{n(n-1)}$
IX.		a,d,s	$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{2s}{d}\right)}$
X.	n	a,d,u	$n = 1 + \frac{u-a}{d}$
XI.		a,s,u	$n = \frac{2s}{a+u}$
XII.		d,s,u	$n = \frac{u}{d} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}\right)}$

	Ignote	Date	Formole
XIII.	s	a,d,n	$s = an + {}^{dn}/_2(n-1)$
XIV.		a,d,u	$s = \frac{a+u}{2} + \frac{u^2-a^2}{2d}$
XV.		a,n,u	$s = {}^{n}/_2(a+u)$ formola fondamentale al §. 347.
XVI.		$d.n,u$	$s = nu - \frac{dn(n-1)}{2}$
XVII.	u	a,d,n	$n = a+(n-1)d$ formola fondamentale al §. 346.
XVIII.		a,d,s	$u = -\frac{d}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{d^2}{4} - ad+a^2+2ds\right)}$
XIX.		a,n,s	$u = \frac{2s}{n} - a$
XX.		d,n,s	$u = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2}$

Ragioni, proporzioni e progressioni per quoto e loro proprieta'

349. Come nel trattamento delle ragioni proporzioni e progressioni per differenza, così utilissimo è pure nel trattamento di quelle per quoto, trovare una formola che tutte le esprima, affine di poi dedurne le fondamentali proprietà.

Ragioni e proporzioni per quoto.

350. Se in una proporzione per quoto qualsiasi $a:m = c:r$ si chiami q il valore delle due ragioni eguali, sarà ${}^m/_a = q$, donde $m = aq$, e quindi invece di $a:m$ avremo $a:aq$, formola analitica di una ragione per quoto qualunque: in egual modo sarà ${}^r/_c = q$, donde $r = cq$; e quindi invece di $c:r$ avremo $c:cq$, formola analitica della 2ª ragione. Quindi sostituendo alle due date ragioni le loro formole analitiche, la soprascritta proporzione diventa $a:aq = c:cq$. Questa è la formola *generale analitica* delle proporzioni per quoto, la quale rende evidente la loro proprietà fondamentale, che *il prodotto degli estremi* $a\times cq$ *è uguale al prodotto dei medi* $aq\times c$. Così nella proporzione $a:m = c:r$, abbiamo $ar = cm$. E da questa eguaglianza risulta, che un termine qualunque di una proporzione è sempre determinato per gli altri tre, che cioè $a = {}^{cm}/_r$; $r = {}^{cm}/_a$; $m = {}^{ar}/_c$; $c = {}^{ar}/_m$, delle quali quattro eguaglianze, le prime due mostrano che, *uno qualunque degli estremi è uguale al prodotto dei medi diviso per l'altro estremo*; e le due ultime che, *uno qualunque dei medi è uguale al prodotto degli estremi diviso per l' altro medio*, donde la regola che già si studiò in Aritmetica e che *aurea* fu detta per le utilissime sue applicazioni.

351 Nelle proporzioni continue l' antecedente della 2ª ragione è uguale al conseguente della 1ª, e perciò nella formola analitica conviene sostituire alla c, antecedente della 2ª ragione, aq che è il conseguente della prima; ed avremo $a:aq = aq:aq^2$, ovvero $\div a:aq:aq^2$ formola delle proporzioni continue, dalle quali chiaro rilevasi, che il *prodotto degli estremi*

$a \times aq^2$ *è uguale al quadrato del medio proporzionale cioè ad* $(aq)^2$. Perciò nella $\div m : n : r$ si ha $m \times r = n^2$,

e da questa eguaglianza risulta $m = \frac{n^2}{r}$; $r = \frac{n^2}{m}$; $n = \sqrt{mr}$, delle quali tre equazioni, le prime due ci mostrano che, *un qualunque degli estremi è uguale al medio proporzionale diviso per l'altro estremo*, e l'ultima che *il medio proporzionale è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi*, cosicchè dalla $\div 48 : 12 : x$ deduciamo x $12^2 : 48 = 3$; e da $\div 4 : x : 9$ deduciamo $x = \sqrt{4.9} = 6$.

352. Come poi si verifica, che nelle proporzioni il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi, così pure la proposizione inversa che quattro termini formano certamente una proporzione, quando sieno in tal guisa disposti che il prodotto dei medi sia eguale a quello degli estremi. Ed in fatti esprimendo con $a : aq$ la ragione del 1º al 2º termine, o con $c : cq'$ la ragione del 3º al 4º, apponendo al valore di questa ragione un accento per denotare che non possiamo esprimerlo con lo stesso segnale q, con cui abbiamo espresso il valore della prima, perchè ignoriamo se siano eguali, noi abbiamo per ipotesi il prodotto del 1º e 4º termine, cioè $a \times cq'$, eguale $aq \times c$ prodotto dei medi, ossia $acq' = acq$, dondo $q' = q$: dunque le due ragioni hanno un valore eguale: dunque formano una proporzione.

353. E dopo ciò conchiudere possiamo, che come da ogni proporzione $a : c = m : n$ si può far passaggio ad una equazione $an = cm$, facendo il prodotto dei medi e degli estremi; così da una equazione qualunque si può dedurre una proporzione, decomponendo ciascun membro in due fattori, e poi formando gli *estremi* con i due fattori, che compongono un membro, e i *medi* coi due fattori che compongono l'altro. Così per es. dalla equazione $gh = fp$ deducesi $g : f = p : h$: dalla $(a^2 - c^2) = f^2 + 2fg + g^2$ deduciamo $\div a + c : f + g : a - c$; dalla $c = r$ ossia da $c \times 1 = r \times 1$, risulta $c : r = 1 : 1$.

354. Una stessa proporzione può prendere diversi aspetti. Ed infatti siccome le ragioni non sono che frazioni, è chiaro che una proporzione rimane la stessa, se ambi i termini d'una ragione sola o di entrambe o si moltiplichino o si dividano per una data quantità. Così $a : c = u : y$ può prendere i diversi aspetti seguenti.

$$am : cm = u : y$$
$$am : cm = um : ym$$
$$am : cm = ur : yr$$
$$am : cm = {}^u/_r : {}^y/_r$$
$${}^a/_r : {}^c/_r = u : y$$
$${}^a/_r : {}^c/_r = {}^u/_r : {}^y/_r$$
$${}^a/_r : {}^c/_r = {}^u/_m : {}^y/_m$$
$${}^a/_r : {}^c/_r = um : ym$$

355. Diverse proporzioni si possono far derivare da una sola proporzione.

E 1º *Per solo traslocamento di termini*

Dalla proporzione . . . . $a : aq = c : cq$

invertendo si ha . . . . . $aq : a = cq : c$

alternando si ha . . . . $\begin{cases} a : c = aq : cq \\ cq : aq = c : a \end{cases}$

poichè in tutte queste disposizioni il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi.

356. IIº *Per modificazione di termini* nuove proporzioni si hanno, *se per una data quantità si moltiplichino o dividano o i due soli antecedenti, o i due soli conseguenti di una proporzione data*; poichè in tal guisa operando altro non facciamo che alternare la proporzione data, eseguire quindi la moltiplicazione o divisione dei termini di una sola ragione, od alternarla poscia di nuovo.

Così pure una moltitudine di altre proporzioni si ottiene con addizione o sottrazione, o altra sorta di modificazioni fatte ai termini in guisa, che il prodotto dei medi uguale sia sempre a quello degli estremi. Ecco le più interessanti, in ciascuna delle quali può da sè l'Allievo verificare la ora indicata uguaglianza, se per esprimere la prima proporzione, da cui derivano le altre, si serva degli elementi dati dalla formola $a : aq = c : cq$.

357. *La somma o differenza dei termini d'una ragione alla somma o differenza dei termini dell'altra, come l'uno qualunque dei due termini al suo corrispondente, o come le rispettive differenze, se si erano paragonate le somme e viceversa.*

358. *Un estremo o un medio all' altro, come il quadrato del primo al prodotto degli estremi, o medi.*

359. *Il prodotto dei medi è medio proporzionale tra il prodotto degli antecedenti e conseguenti.*

360. Le potenze o radici ennesime dei termini d' una proporzione formano una proporzione ancor esse, cioè essendo

$$a : aq = c : cq$$

si ha pure

$$a^n : a^n q^n = c^n : c^n q^n$$

come ancora

$$\sqrt{a} : \sqrt{aq} = \sqrt{c} : \sqrt{cq}$$

361. DIVERSE PROPORZIONI SI POSSONO FAR DERIVARE DA COMBINAZIONI O MODIFICAZIONI FATTE SUBIRE AI TERMINI O DI PIU' RAGIONI EGUALI, O DI PIU' PROPORZIONI. *Infatti in una serie di ragioni eguali la somma di tutti gli antecedenti sta a quella dei conseguenti come un antecedente al suo conseguente, o come la parzial somma di qualsivoglia numero di antecedenti alla somma dei respettivi conseguenti.* Ed infatti oltre che le indicate proporzioni debbono essere vere, perchè il prodotto dei medi trovasi eguale a quello degli estremi, provasi che il deggiono essere anche, perchè nella serie di più ragioni eguali $a:aq = c:cq = f:fq = g:gq$, è sempre q il quoto valore della ragione non solo di qualunque antecedente paragonato al suo conseguente, ma della ragione ancora di qualunque somma di antecedenti alla somma dei rispettivi conseguenti, come per es. di $a+c : aq+cq$ ossia di $a+c : (a+c)q$; di $a+c+f : aq+cq+fq$, ossia di $a+c+f : (a+c+f)q$; ec.

362. *In un seguito di proporzioni in cui sieno eguali i conseguenti,* come le qui sotto descritte,

$$a : e = m : i$$
$$n : c = s : i$$
$$r : c = u : i$$

le somme dei respettivi antecedenti stanno tra loro come i comuni conseguenti, perchè alternandole, si ha un seguito di ragioni eguali, como qui sotto osserviamo

$$a : m = c : i$$
$$n : s = c : i$$
$$r : u = c : i$$

dalle quali si deduce (§.361) la proporzione $a+n+r : m+s+u = c : i$, la quale confrontata con le ragioni a principio esposte, ci dimostra ciò che voleva provarsi.

363. *I prodotti, o i quoti che nascono dal moltiplicare o dividere i termini d' una proporzione per i rispettivi d' un' altra, formano una proporzione ancor essi.* Avendosi cioè

$$(L)....a : aq = c : cq$$
$$(M)...m : mq' = g : gq'$$

sono vere anche le due seguenti proporzioni (N) e (O)

$$(N)... am : amqq' = cg : cgqq'$$

$$(O)... \frac{a}{m} : \frac{aq}{mq'} = \frac{c}{g} : \frac{cq}{gq'}$$

poichè in ambedue, il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi.

364. E qui si noti, che RAGIONI COMPOSTE *si chiamano quelle che nascono dal moltiplicare tra loro i rispettivi termini di due o più ragioni semplici:* così $am:cn$ è una ragione composta delle due $a:c$, ed $m:n$; ed $amr:cns$ la è delle tre $a:c$, $m:n$, $r:s$.

365. *Quelle poi tra le ragioni composte che risultano dalla moltiplicazione di due ragioni uguali, chiamansi* DUPLICATE, TRIPLICATE *quelle che nascono dalla moltiplicazione di tre ragioni uguali*, ec.

Così $ac:aq^2$ è la duplicata delle due ragioni eguali $a:aq$, $c:cq$. E verificandosi che

$$ac : acq^2 = a^2 : (aq)^2$$
$$ac : acq^2 = c^2 : (cq)^2$$

perchè il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi, conchiudiamo che *la ragione duplicata* è uguale alla ragione dei quadrati di ciascuna delle semplici da cui deriva.

Così $acm:acmq^3$ è la *triplicata* delle tre uguali $a:aq, c:cq, m:mq$. E verificandosi che

$$acm : acmq^3 = a^3 : (aq)^3$$
$$acm : acmq^3 = c^3 : (cq)^3$$
$$acm : acmq^3 = m^3 : (mq)^3$$

conchiudiamo che *le ragioni triplicate sono uguali alle ragioni dei cubi dei termini di ciascuna delle semplici da cui derivano; ed in genere le ennuplicate sono uguali alle ragioni delle potenze ennesime dei termini di ciascuna delle semplici da cui derivano.*

366. Dall' eguaglianza poi delle ragioni

duplicate coi quadrati, e delle ragioni triplicate coi cubi di ciascuna delle semplici da cui derivano, è invalso l'uso di dire, quando si abbia $r : s = m^2 : n^2$; e $g : h = p^3 : q^3$, che r sta alla s nella *ragione duplicata* di m ad n: e g ad h nella *triplicata* di p a q; come pure è bene di conoscere, che suole pur dirsi, che due quantità stanno nella ragione *sudduplicata* o *suttriplicata* di due altre, invece di dire che stanno come le radici quadrate o cubiche di queste.

Progressioni per quoto.

367. Le progressioni per quoto sono anch'esse una catena di proporzioni continue, cioè una serie di termini, in cui quante volte il 2° contiene il 1°, ed altrettanto il 3° contiene il 2°, il 4° contiene il 3°, ec. cosicchè tutti i termini meno il primo sono conseguenti, tutti i termini meno l'ultimo sono antecedenti di ragioni tutte uguali. Quindi è che chiamato q il quoto costante, per cui convien moltiplicare ogni antecedente affine nasca il conseguente, e chiamato a il primo dei suoi termini ed n il loro numero, la sua formola generale analitica sarà la stessa formola delle proporzioni continue oltre protratta colla medesima legge, cioè

$$(P) \div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : \ldots aq^{n-1}$$

368. In questa si scorge che i termini vanno successivamente crescendo, ossia formano una progressione *crescente* se q è >1, e vanno successivamente decrescendo, ossia formano una progressione *decrescente* se q è una vera frazione. (§.179). Così le serie

$$\text{I} \ldots 4 : 12 : 36 : 108 : 324,$$

$$\text{II} \ldots 45 : 15 : 5 : {}^5/_3 : {}^5/_9$$

sono progressioni, *crescente* la 1ª e *decrescente la* 2ª, perchè il quoto è 3 per la prima, ed è $^1/_3$ per l'altra. Così, posta $a<c$, e quindi vera la frazione $^a/_c$, le progressioni

$$\text{I} \ldots \frac{a}{c} : \frac{a^2}{c^2} : \frac{a^3}{c^3} : \frac{a^4}{c^4};$$

$$\text{II} \ldots \frac{a^4}{c^4} : \frac{a^3}{c^3} : \frac{a^2}{c^2} : \frac{a}{c}$$

sono, *decrescente la* 1ª; perchè ha per quoto $^a/_c$ che è <1, e *crescente la* 2ª, perchè ha per quoto $^c/_a>1$; cosicchè conchiudiamo, che una progressione da decrescente diviene crescente e viceversa, sol che venga scritta con ordine inverso.

369. Dalla ispezione della formola analitica (P), deducesi pure che ciascuno dei termini deriva dal 1° a, altro non essendo che lo stesso a moltiplicato pel quoto costante q elevato alla potenza espressa dal numero dei termini precedenti, cosicchè l'ultimo termine non solo, ma qualunque termine u ci piaccia di precisare, ci vien determinato dalla interessante formola

$$(Q) \ldots u = aq^{n-1},$$

la quale perciò dicesi la formola del *termine generale* della progressione.

370. Per rappresentare poi con una formola la somma s di tutti i termini d'una progressione per quoto, riflettiamo che tutti i termini d'una progressione, meno l'ultimo, figurano per antecedenti; e tutti, meno il primo figurano per conseguenti di tante ragioni eguali (367) sicchè la somma degli antecedenti è rappresentata da $s-u$, e quella dei conseguenti da $s-a$; e perciò rammentando, che in una serie di ragioni eguali sta la somma degli antecedenti a quella dei conseguenti, come il 1° antecedente al suo conseguente (§.361) avremo $s-u : s-a = a : aq$, e quindi $aqs-aqu = as-a^2$ (§. 349) donde

$$(R) \ldots s = \frac{qu-a}{q-1}$$

la quale formola tradotta in ordinario linguaggio ci esprime che *la somma dei termini di una progressione per quoto è uguale alla differenza fra il prodotto dell'ultimo termine moltiplicato pel quoto, e fra il termine primo, divisa pel quoto diminuito di* 1.

371. Le due formole (Q) ed (R) ci offrono il mezzo di risolvere col sussidio delle studiate teoriche delle equazioni di 1° e 2° grado, un problema analogo a quello risoluto per le progressioni per differenza, in 12 soli casi però dei 20 che abbraccia, mentre per gli altri 8 si esige la cognizione dei logaritmi e delle equazioni dei gradi superiori, come agevolmente rilevasi dando uno sguardo nel seguente specchio alle formole contrassegnate con l'asterisco *, le quali abbiamo creduto bene di non ommettere (sebbene non intelligibili all'Allievo fornito delle sole cognizioni fin qui esposte) ad oggetto di rendere completa la Tavola, ed utile allorchè la teoria generale delle equazioni e dei logaritmi sarà conosciuta.

	Ignote	Date	Formole
I.		n,q,s	$a = \frac{s(q-1)}{q^n-1}$
II.	a	n,q,u	$a = \frac{u}{q^{n-1}}$
III.		n,s,u	$*(s-a)a^{\frac{1}{n-1}} - (s-u)u^{\frac{1}{n-1}} = 0$
IV.		q,s,u	$a = q(u-s)+s$
V.		a,q,s	$*\ n = \frac{L(s(q-1)+a) - La}{Lq}$
VI.	n	a,q,u	$*\ n = 1 + \frac{Lu - La}{Lq}$
VII.		a,s,u	$*\ n = 1 + \frac{Lu - La}{L(s-a) - L(s-u)}$
VIII.		q,s,u	$*\ n = 1 + \frac{Lu - L(qu-qs+s)}{Lq}$
IX.		a,n,s	$*\ q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s}{a} - 1 = 0$
X.	q	a,n,u	$q = \sqrt[n-1]{u/a}$
XI.		a,s,u	$q = \frac{s-a}{s-u}$
XII.		n,s,u	$*\ q^n - \frac{s}{s-u}q^{n-1} + \frac{u}{s-u} = 0$
XIII.		a,n,q	$s = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$
XIV.	s	a,n,u	$s = \frac{\sqrt[n-1]{u^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$
XV.		a,q,u	$s = \frac{qu-a}{q-1}$ formola fondamentale al §. 370
XVI.		n,q,u	$s = \frac{u}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$

	Ignote	Date	Formole
XVII.		a,n,q	$u = aq^{n-1}$ formola fondamentale al §. 369
XVIII.	u	a,n,s	* $(s-u)u^{\frac{1}{n-1}}-(s-a)a^{\frac{1}{n-1}} = 0$
XIX.		a,q,s	$u = s - \frac{(s-a)}{q}$
XX.		n,q,s	$u = sq^{n-1}\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$

372. La deduzione delle esposte formole servirà agli Allievi di un utilissimo esercizio; e ad agevolare la strada che dovranno praticare per ottenerle, stimiamo utile offrire in esempio la soluzione di due casi che sono interessanti anche per la teorìa della scienza, e perchè il 1° ci offre il modo di inserire qualsivoglia numero di medi proporzionali fra due termini dati, e il 2° ci fa rimarcare una notabile differenza fra le progressioni per quoto crescenti e le decrescenti.

373. Dati a, n, u, si trovi q. Dalla (Q) $u = aq^{n-1}$ si ottiene $q^{n-1} = {}^{u}/_{a}$, e quindi $q = \sqrt[n-1]{{}^{u}/_{a}}$. A questo quesito va a riferirsi *la ricerca del valore di tutti e singoli i medi proporzionali che in un dato numero qualunque m vogliamo che esistano fra due numeri*, poichè questa non è che la ricerca di tutti i termini intermedi, che esistono tra i dati estremi di una progressione, e questi si fanno tosto derivare dal primo, quando è noto q (§.367). Riflettendo perciò che essendo dato il numero m dei medi proporzionali che vogliionsi inserire, è dato anche il numero totale n dei termini della progressione, poichè esso non è che m più i due estremi, ossia $m+2$, la proposta ricerca riducesi a trovare q, dati a, n, u. Ed eccone un'applicazione.

374. « Un padre ha donato ad un figlio 10 semi di frumento, col permesso di far fruttificare questi semi per anni 10, convertendo in semente la raccolta di ogni anno in un predio, che ha sempre presentato la stessissima fertilità. Alla fine del decimo anno il figlio riscuote una messe di 604661760 semi di frumento. A chè ragione è stato fertile il terreno? Risultato: ha reso il 6 per 1. »

Questo quesito appartiene ad una progressione per quoto in cui $a = 10$, $u = 604661760$, $n = 11$, perchè 11 è il numero n dei termini formato dai due estremi a ed u, più i 9 medi proporzionali che deggiono inserirsi fra essi, e che sono le successive raccolte dei primi nove anni; e cercasi q che rappresenta il rapporto costante del frutto al seme in tutti gli anni 10.

Or $q = \sqrt[n-1]{{}^{u}/_{a}}$ (§.373) diventa nel nostro caso $q = \sqrt[10]{{}^{604661760}/_{10}} = \sqrt[10]{60466176}$ $= \sqrt[5]{\sqrt[2]{60466176}}$ (§.299) $= \sqrt[5]{7776}$ $= 6$ (§.177).

375. Dati a, n, q, si trovi s. La s si ottiene, sostituendo alla u il suo equivalente aq^{n-1}, datoci dalla (Q), nella formola (R) $s = \frac{qu-a}{q-1}$, poichè convertesi in $s = \frac{q\times aq^{n-1}-a}{q-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$

376. L'analisi di questa formola ci reca ad una interessante osservazione. Quando q è un intero, e perciò crescente la progressione (§.368), quanto più n si aumenta, e tanto più ingrandisce il valore di q^n; ed s potrà sorpassare qualunque quantità ci piaccia, purchè ad n si dia un conveniente valore: non v'è cioè limite alcuno all'ingrandimento di s. Ma se q è una

frazione espressa da $^1/_m$, se cioè la progressione è decrescente (§. 368) si avrà allora

$$s = \frac{a\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{^1/_m - 1} = \frac{am\left(\frac{1}{mn} - 1\right)}{1 - m} = \frac{am\left(1 - \frac{1}{m^n}\right)}{m - 1} = \frac{am}{m-1} - \frac{a}{(m-1)m^{n-1}}$$

dalla quale ultima espressione rilevasi, che qualunque sia il numero dei termini che prendiamo in considerazione, la prima parte positiva della formola rappresentante s rimane sempre la stessa: non così però la seconda parte negativa: infatti quanto più grande diventa il numero variabile n, tanto più grande diventa ancora il denominatore di questa seconda parte, e quindi tanto più piccola essa medesima. Quindi è I° che so questa seconda parte negativa della formola rappresentanto s tanto più impiccolisce quanto più n si fa grande, il valore di s si avvicinerà sempre più alla prima parto positiva o costante $^{am}/_{m-1}$ quanto è maggiore il numero dei termini cho nella progressione consideriamo, poichè tanto più lieve si rende allora la diminuzione che dobbe subire il primo termine affine possa prendersi pel valore di s. Ed è pur chiaro II° che questa prima parte della formola è sempre maggiore di s somma della progressione decrescente, qualunque numero di termini anche grandissimo essa abbracci, subitochè per rappresentare s, debbe esser diminuita della seconda quantità, la quale per quanto impiccolisca, non può però mai ridursi assolutamente allo zero. Dunque $^{am}/_{m-1}$ è il vero limite, cui sempre più indefinitamente approssimarsi vediamo la somma di una progressione decrescente a tenore che cresce il numero dei suoi termini, colla certezza che dessa somma mai può giungero ad eguagliarlo finchè il numero dei termini è finito.

377. Dall' esposto dunque rilevasi, che a rigore non solo nelle progressioni crescenti, ma ancora nelle decrescenti, allorchè si considerano protratte all' infinito, la somma va crescendo col numero dei termini, ma che ciò non ostante v' è tra di esse sotto questo riguardo un' essenziale differenza; mentre nelle *crescenti* col vieppiù aumentarsi la serie dei termini, non v' ha numero per quanto grandissimo voglia immaginarsi, che la somma dei termini della progressione prolungabile a nostro arbitrio, non giunga a superare: nelle *decrescenti* all' opposto qualunque sia il numero dei termini cui ci estendiamo, v' ha sempre un *limite* determinato, cui può la somma sempro più avvicinarsi, ma che non è raggiunto so non quando la serie è infinita.

378. Quando poi la serie ha un numero infinito di termini, n è infinito: quindi la 2ª parte negativa della formola che ne esprime la somma, ha nel denominatore un fattore elevato a una potenza infinita, e perciò ha un denominatore infinito, sicchè dessa è infinitesima. Dunque la parte positiva della formola che è $^{am}/_{m-1}$ nelle serie decrescenti infinite non debbe essere diminuita che di una quantità infinitesima.

Ora como l' infinito non soffre diminuzione per sottrazione che gli si faccia di qualsivoglia quantità finita per la proprietà che ha il minuendo infinito di non avere quelle unità che dovrebbero costituirne il limite, e dalle quali dovrebbe aver principio la sottrazione, così il finito non soffre diminuzione per sottrazione che gli si faccia di una quantità infinitesima, per non essere definita la parvità del sottraendo. Ed invero quando ci proponiamo la sottrazione di un infinitesimo da una quantità finita, alla stessa idea del toglimento è indissolubilmente congiunto il giudizio che qualunque frazione la più piccola ideabile che immaginiamo di togliere è *troppa*. In questo stato la nostra mente (la quale, finchè si accorgo che la sottrazione ha effettuata una diminuzione, si trova obbligata a giudicare che si è tolto più di quello che si doveva) non desiste dalle sue sollecitudini dirette a vieppiù esinanire il sottraendo e non si tranquillizza e non si riposa che nel concetto, che *la quantità finita per la sottrazione dell' infinitesimo non subisca diminuzione*. Ciò posto, la somma dei termini d'una progressione decrescente all' infinito è $^{am}/_{m-1}$, e cioè la sola prima parto, poichè la sottrazione della seconda, che è una quantità infinitesima, non vi produce alterazione.

E ben si noti che la sottrazione dell'infinitesimo non effettua diminuzione nel minuendo, perchè esso è, non già uguale a zero, ma perchè è *minore di ogni assegnabile*. *L' infinitesimo non è zero*, poichè se tale fosse, tale sarebbe l' ultimo termine d'una

progressione decrescente all'infinito, e allora, inverso l'ordine della progressione, l'ultimo termine diverrebbe il primo: la progressione da decrescente dovrebbe divenire crescente: ma zero essendo il primo elemento, zero diverrebbero gli altri termini tutti che derivano per moltiplicazione dal primo; e quindi zero per conseguenza, e non $^{am}/_{m-1}$, siccome debbe essere, diverrebbe la somma loro. *L'infinitesimo è una quantità minore di ogni assegnabile*, poichè se assegnabile fosse, l'ultimo termine infinitesimo (per quanto tenuissimo si immaginasse) sarebbe suscettibile di moltiplicazione. Quindi rovesciata la progressione, e divenuta da decrescente crescente, la tenuissima entità apprezzabile dell'ultimo termine divenuto primo, moltiplicata successivamente pel quoto darebbe termini che proseguirebbero a crescere senza fine e la loro somma sarebbe perciò un numero infinito, e non gia il finito $^{am}/_{m-1}$ como debbe essere.

Finalmente a convincerci che una quantità finita possa poi esprimersi per una progressione decrescente di un numero infinito di termini basti il riflettere, che se nella espressione si è intruso il concetto dell'*infinito*, questa illimitata espansione trova il suo antidoto nella idea dell'infinitesimo che vi è collegata.

E la possibiltà di questo concetto è bene che da un esempio sia costatata.

Una tartaruga ha fatto il primo miglio in due ore: Achille due volte più veloce di essa comincia a percorrere il 1° miglio quando la tartaruga incomincia il 2°. È perciò ben chiaro, che quando essa compie in altre due ore il 2° miglio, è allora raggiunta da Achille che nelle stesse due ore percorre il 1° miglio e il 2°.

Ora questo spazio di due miglia percorso, e questo tempo di due ore impiegato da Achille per raggiungere la tartaruga si può esprimere per la somma di una progressione decrescente di un numero infinito di termini, dando luogo a questo concetto. Quando Achille (che in due ore e dopo due miglia raggiunge la tartaruga) ha percorso il 1° *miglio*, la tartaruga ha percorso la prima metà del secondo: percorre Achille questa *metà* del secondo miglio, e la tartaruga si trova avanzata oltre la detta metà di un quarto di un miglio. Quando Achille ha percorso questo *quarto* anch'egli, la Tartaruga il precede di un ottavo, poscia di un sedicesimo quando Achille trovasi al termine del detto *ottavo* ec. cosicchè Achille sempre più avvicinandosi non raggiungerà la tartaruga (lo che d'altronde sappiamo accadere quando ha percorso due miglia) che al compimento di questa serie di un numero infinito di termini. Dunque le due ore e le due miglia da esso impiegato e percorse per raggiungere la tartaruga possono esprimersi dicendo che $2 = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} + \ldots$ all'infinito.

Ora che 2 esser debba uguale alla somma dei termini della detta serie all'infinito protratta, ce lo addimostra anche l'Algebra con la formola del termine sommatorio, che nel caso di n infinito diviene $^{am}/_{m-1}$ che appunto è 2 quando facciasi $a = 1$; e $^1/_m = {}^1/_2$, come il nostro esempio richiede.

E se la formola $^{am}/_{m-1}$ ottenuta per l'applicazione del principio che *la sottrazione dell'infinitesimo non diminuisce il finito* soddisfa esattamente, della verità di questo principio essa è una conferma.

Il 2 dunque (e così dicasi di qualsiasi altra quantità) è uguale alla somma di tutti i termini di una progressione decrescente all'infinito protratta. Nè per questo concetto havvi bisogno che materialmente si abbia schierata d'innanzi agli occhi tutta la serie proseguita all'infinito, come ben osserva il chiarissimo Padre Antonelli (nel che appunto starebbe l'assurdo) ma basta che si abbia l'idea della virtuale sua prosecuzione a tenor di una legge conosciuta.

Non è dunque vero ciò che il sempre rispettabile Rosmini asserisce, che cioè *le proposizioni matematiche nelle quali si fa entrar l'infinito sieno assurde*. Dovea invece egli dire, che *sono verità condizionali nelle quali è nominato un assurdo*; ma verità sempre e assurdi mai. Così la formola del termine generale $u = aq^{n-1}$ è una verità incontrastabile anche quando infinito è il numero dei termini della progressione, poichè viene ad esprimerci « *se potesse aversi l'ultimo termine d'una progressione che non ha termine, è infallibile che esso sarebbe espresso dalla formola* aq^{n-1}. » Nè questa formola è inutile. Essa entra nel calcolo, ed influisce nei suoi risultati; poichè ci reca come abbiamo osservato alla formola del termine sommatorio, che è infallibile anch'essa. Dire pos-

siamo perciò, che l'Algebra alle sue generalissime speculazioni assoggetta l'infinito pur anche.

Quindi è che se il Rosmini in vece di credere che le proposizioni in cui si fa entrare l'infinito conducano a sofismi e sieno assurde, più profondamente studiandole, le avesse in vece riconosciute per proposizioni verissime nelle quali è nominato un assurdo, non sarebbe sceso all'altro errore di credere, che intanto ci recano a veri risultamenti, *perchè non passano e non influiscono nel calcolo*. Avrebbe in vece rimarcato all'opposto che esse nel calcolo entrano ed influiscono realmente, ed intanto ci portano a veri risultamenti, perchè sono verità incontrastabili.

Nel concetto ideale $2 = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} + \ldots\ldots$ *all' infinito* non v'ha assurdo veruno. Vi s'intruderebbe l'assurdità, se si pretendesse di giungere di fatto a vedere schierato questo numero infinito di termini cui è uguale il 2, se si pretendesse di applicare alle cose quella divisibilità infinita che sta nell'ideale concetto, se si pretendesse che lo spazio di due miglia e il tempo di due ore potesse realmente dividersi in un numero infinito di parti a tenore della ideale progressione cui si è fatto uguale il 2; ed in questa pretensione è appunto riposto il sofisma da Zenone addotto contro la realtà del moto, sofisma col quale contro il fatto sostenere pretendeva quel Sofo che la tartaruga non potea mai nelle esposte condizioni essere raggiunta da Achille.

Ma ulteriori dilucidazioni in queste vedute ci riserviamo di dare negli *Esercizi Aritmetici*, *Algebrici e Geometrici* che speriamo di dare a luce, e nei quali in particolar modo l'ora esposta teorica delle progressioni per differenza e per quoto avrà molti altri sviluppi che ci recheranno a rimarcare delle interessanti proprietà ed applicazioni. E specialmente in esse viepiù renderassi evidente e la utilità della distinzione dei numeri indicanti oggetti e indicanti ripetizione, e la impossibilità di moltiplicar per frazione, e la massima che il vero moltiplicare in tutta la scienza Matematica altro non è che ripetere, e che il segno — non ha virtù qualificante nel calcolo, e che le quantità negative non sono che sottrazioni di quantità, nostre originali vedute sulle quali la esposizione è basata di questa edizione degli elementi di Matematica la quale sebbene sia la quarta, è però la prima in cui ci siamo allontanati, ove l'abbiamo stimato utile, liberamente e senza riguardi dalla servile imitazione dei corsi stranieri.

Epilogo

Sulla teoria delle ragioni, proporzioni e progressioni algebriche per differenza e per quoto.

RAGIONI, PROPORZIONI E PROGRESSIONI PER DIFFERENZA.

La formola generale analitica delle RAGIONI per differenza è $a \,.\, a+d$. Quella delle PROPORZIONI è $a \,.\, a+d = c \,.\, c+d$, donde segue che la somma dei medi è uguale a quella degli estremi, e che quattro termini dei quali la somma degli estremi è uguale a quella dei medi, sono in proporzione. E se la proporzione è continua, il doppio del medio proporzionale è uguale alla somma degli estremi, donde segue che il medio proporzionale è uguale alla loro semi-somma, ed ogni estremo é uguale al doppio del medio proporzionale diviso per l'altro estremo (§ 339 al 344).

La formola generale analitica delle PROGRESSIONI è $a \,.\, a+d \,.\, a+2d \ldots a+(n-1)d$; e da essa derivano le interessanti formole seguenti

Termine generale . . . . $u = a + (n-1)d$

Termine sommatorio . . . $s = {}^n/_2\,(a+u)$

Con queste poi, dei 5 elementi di una progressione, i quali sono a, d, n, s, u, *si trovano due qualunque, dati che sieno gli altri tre* (§ 345 *al* 348).

RAGIONI, PROPORZIONI E PROGRESSIONI PER QUOTO.

La formola generale analitica delle RAGIONI per quoto è $a : aq$. Quella poi delle PROPORZIONI è $a : aq = c : cq$, donde segue che il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi, e quindi il mezzo di trovare uno dei termini, dati gli altri tre, e che quattro termini quando hanno il prodotto dei medi uguale a quello degli estremi, stanno in proporzione, la quale verità ci offre il modo di convertire una equazione in proporzione. Se poi la proporzione è continua, il medio proporzionale è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi, e un estremo è uguale al quadrato del medio proporzionale diviso per l'altro estremo (§. 349 al 353).

Dalla formola poi delle *proporzioni* scende: I. che una stessa proporzione può prender diversi aspetti: II. che diverse proporzioni derivano da una sola o per *cambiamento di posto nei termini* (invertendoli o alternandoli) o per *modificazione di termini*, per la quale data una proporzione, sta p. es. la somma o differenza dei termini della *prima* ragione alla somma o differenza dei termini dell'al-

tra, come l'uno qualunque di essi al suo relativo: così pure stanno in proporzione le rispettive uguali potenze o radici dei suoi termini, ec.: III. Diverse proporzioni derivano da più *ragioni eguali*. Così la somma di tutti gli antecedenti a quella di tutti i conseguenti, come un antecedente qualunque al suo conseguente. Così i prodotti o i quoti dei termini di una proporzione moltiplicati o divisi per i relativi di un' altra, formano una proporzione, e nelle composte le duplicate stanno in ragione dei quadrati, le triplicate in ragione dei cubi delle semplici di cui risultano (§. 354 al 366).

La formola generale analitica delle PROGRESSIONI è $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^{n-1}$; ed è crescente, quando q è *maggiore*, decrescente quando q è *minore di* 1. In entrambe poi sono interessanti le seguenti formole.

Termine generale . . . . . $u = aq^{n-1}$

Termine sommatorio . . . $s = \dfrac{qu - a}{q - 1}$

Con queste poi si trovano due elementi qualunque di una progressione, noti gli altri tre: e se ne è dato un esempio pel caso in cui ricercasi q, dati a, n, u, caso che ci mostra il modo d' inserire un numero qualunque m di medi proporzionali fra due termini dati; e pel caso in cui dati a, n, q ricercasi s, la cui formola ci mostra che la somma delle progressioni crescenti protratte all' infinito va a superare qualunque numero, e sia pur grandissimo; mentre per la somma delle decrescenti si ha un limite (§ 367 al 378).

FINE DELL' ALGEBRA

INDICE

SEZIONE I[a]

SEZIONE II[a]

SEZIONE III[a]

SEZIONE IV[a]

SEZIONE V[a]

SEZIONE VI^a

SEZIONE VII^a

SEZIONE VIII^a

pagina	colonna	linea	ERRORI	CORREZIONI
8	2ª	17	$y = {}^{84}/_{2} - {}^{12}/_{2}$	$y = {}^{84}/_{2} + {}^{12}/_{2}$
17	1ª	27	di volle il moltiplicatore	di volle il moltiplicando
36	2ª	33	che val lo stesso) e	che val lo stesso) comune e
	2ª	ultima	divisore $8a^4c^2gm$	divisore $8a^4c^2m$
40	2ª	36	$\frac{(a+c)\,(a+c)\,(a+c)}{a^2}$	$\frac{(a+c)\,(a-c)\,(a+c)}{a^2}$
47	1ª	9	${}^4/_3(m^2-r^3)+$	${}^4/_3(m^2r-r^3)+$
	2ª	34	$cx\times-ac+a$	$c\times-ac+a$
50	2ª	11	e $100 = c$	e $100 = a$
67	2ª	3	*l' un per l' altro divisi.*	*l' una per l' altra divise.*
	2ª	ultima	$\left(\frac{-9a^3}{11}\right)^4 =$	$\left(\frac{-9a^2}{11}\right)^4 =$
70	1ª	8	$= \sqrt[3]{c^4}$	$= (\sqrt[3]{c})^4$
120	1ª	1	E III. traducendo	E che traducendo

IMPRIMATUR | IMPRIMATUR
Fr. Thom. Vincent. Ord. Praed. Inq. Gen. S.O. | *Carolus Archipresb. Laurenzi Pro-Vic. Gen.*
VISTO PER LA DELEGAZIONE = *Innocenzo Sgariglia Consultore Delegatizio*